



# Contributions à l'observation par commande d'observabilité et à la surveillance de pipelines par observateurs

Ignacio Eduardo Rubio Scola

## ► To cite this version:

Ignacio Eduardo Rubio Scola. Contributions à l'observation par commande d'observabilité et à la surveillance de pipelines par observateurs. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Grenoble Alpes, 2015. Français. NNT : 2015GREAT006 . tel-01206512

**HAL Id: tel-01206512**

**<https://theses.hal.science/tel-01206512>**

Submitted on 29 Sep 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE**

Spécialité : **Automatique - Productique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Ignacio Eduardo RUBIO SCOLA**

Thèse dirigée par **Gildas BESANÇON** et

codirigée par **Didier GEORGES**

préparée au sein du **Laboratoire GIPSA-LAB**

dans l'**ECOLE DOCTORALE EEATS**

## Contributions à l'observation par commande d'observabilité et à la surveillance de pipelines par observateurs.

Thèse soutenue publiquement le **30 janvier 2015**,  
devant le jury composé de :

**Anne-Catherine FAVRE**

Institut Polytechnique de Grenoble, INPG, Grenoble, Présidente

**Hassan HAMMOURI**

Laboratoire d'Automatique et de Génie des Procédés, LAGEP, Lyon,  
Rapporteur

**Xavier LITRICO**

Lyonnaise des Eaux, LyRE, Bordeaux, Rapporteur

**Jean-François DULHOSTE**

Université des Andes, ULA, Mérida, Examineur

**Pascal DUFOUR**

Laboratoire d'Automatique et de Génie des Procédés, LAGEP, Lyon,  
Examineur

**Gildas BESANÇON**

Grenoble Images Parole Signal Automatique, GIPSA-LAB, Grenoble,  
Directeur de thèse

**Didier GEORGES**

Grenoble Images Parole Signal Automatique, GIPSA-LAB, Grenoble,  
Co-Directeur de thèse





# Remerciements

Je tiens à adresser mes plus sincères remerciements et ma pleine reconnaissance à mes deux directeurs de thèse : Gildas Besançon et Didier Georges pour tout leur aide à travers le long travail de thèse, leur patience, leurs indications précises et minutieuses, et leurs réflexions qui ont été toujours riches en enseignements. Leur soutien constant m'a beaucoup encouragé de continuer et d'approfondir l'activité de recherche.

Je tiens à remercier également les membres du Jury, qui ont accepté de juger mon travail : Mme. Anne-Catherine Favre pour m'avoir fait l'honneur de présider la soutenance et d'examiner mon travail, M. Xavier Litrico, M. Hassan Hammouri, M. Pascal Dufour et M. Jean-François Dulhoste pour avoir accepté d'examiner en profondeur mon travail, ainsi que pour tous leurs commentaires constructifs.

J'exprime également ma reconnaissance aux professeurs de Gipsa-Lab pour leurs critiques et leurs enseignements toujours constructifs, particulièrement aux membres de SysCO, ainsi que tout le personnel qui rend la vie des thésards plus agréable.

Mes remerciements vont également aux professeurs M. Jean-François Dulhoste, M. Marcos Guillén et M. Rafael Santos pour m'avoir si gentiment accueilli au sein du Laboratoire de mécanique de l'université des Andes. Une pensée particulière pour leurs familles qui ont fait de mes séjours au Venezuela une expérience inoubliable.

Je tiens aussi à remercier mes collègues et amis du laboratoire, avec lesquels j'ai partagé tant de choses, particulièrement John et Yara, et Soheib qui est devenu un frère.

Enfin, je ne saurais oublier les plus importants : ma famille et ma femme, Marilina, de m'avoir, d'une part, soutenue tout au long de cette thèse et, d'autre part, supporté dans tous les sens du terme. Ce travail est pour vous.

A vous tous, un grand merci.



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>I Contributions à l’observation par “commande d’observabilité”</b>	<b>5</b>
<b>1 Rappel Observateurs non-linéaires</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction et notations de base . . . . .	7
1.2 Problème d’observation, observabilité, et Grammien . . . . .	9
1.3 Observateurs de type Kalman . . . . .	13
1.4 Grammien et observateurs de type Kalman en temps discret . . . . .	16
1.5 Conclusions . . . . .	18
<b>2 Commande de l’observabilité en se basant sur le grammien</b>	<b>19</b>
2.1 Introduction . . . . .	19
2.2 Structures affines en l’état . . . . .	20
2.3 Structures affines en l’état avec injection de la sortie . . . . .	26
2.4 Conclusions . . . . .	31
<b>3 Commande de l’observabilité en se basant sur l’observateur</b>	<b>33</b>
3.1 Introduction . . . . .	33
3.2 Amélioration d’observabilité par commande de l’équation de l’observateur seulement . . . . .	34
3.3 Amélioration de l’observabilité à partir de l’équation de l’observateur et du grammien . . . . .	40
3.4 Conclusions . . . . .	49

<b>II</b>	<b>Contributions à la surveillance de pipelines “par observateurs”</b>	<b>51</b>
<b>4</b>	<b>Rappels sur la modélisation de pipelines avec défauts et les techniques de surveillance associées</b>	<b>53</b>
4.1	Introduction . . . . .	53
4.2	Modèle en dimension infinie . . . . .	54
4.3	Modèle en différences finies . . . . .	59
4.4	Modèle linéaire fréquentiel . . . . .	60
4.5	Surveillance à partir du modèle en différences finie . . . . .	66
4.6	Surveillance à partir du modèle fréquentiel . . . . .	70
4.7	Conclusions . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Contributions à la modélisation d’une canalisation avec défauts</b>	<b>75</b>
5.1	Introduction . . . . .	75
5.2	Modèle en différence finies avec instrumentation . . . . .	76
5.3	Modèle en différences finies avec obstruction . . . . .	78
5.4	Analyse de sensibilité . . . . .	80
5.5	Modélisation par différences finies implicites . . . . .	81
5.6	Conclusions . . . . .	88
<b>6</b>	<b>Contributions aux méthodes de surveillance de pipelines</b>	<b>91</b>
6.1	Introduction . . . . .	91
6.2	Surveillance à partir d’un modèle d’état simple . . . . .	92
6.3	Surveillance à partir d’un modèle fréquentiel . . . . .	111
6.4	Surveillance à partir du modèle discrétisé plus précis . . . . .	129
6.5	Conclusions . . . . .	131
	<b>Conclusions générales et Perspectives</b>	<b>133</b>







# Table des figures

2.1	Vecteur d'entrées par rapport à la fenêtre du grammien correspondant . . . . .	22
2.2	Entrées persistante optimale et sortie bruitée . . . . .	25
2.3	Erreurs sur les états $x_1$ et $x_2$ et estimés des états $x_3$ et $x_4$ . . . . .	25
2.4	Entrées persistantes pour les paramètres de la Table 2.2 . . . . .	26
2.5	Réalisation de la condition du grammien sur une fenêtre de $2\sigma_{MAX}$ de longueur. . . . .	27
2.6	Sortie bruitée, entrée persistante et erreur d'estimation . . . . .	30
2.7	États estimés et taille des fenêtres des grammiens . . . . .	31
3.1	Estimation de $x_1$ et $x_2$ pour le cas (i). . . . .	39
3.2	Erreur d'estimation de $x_3$ et $x_4$ pour le cas (i). . . . .	39
3.3	Entrée optimale et valeurs propres maximales de $P$ pour le cas (i). . . . .	39
3.4	Erreur d'estimation de $x_1$ et $x_2$ pour le cas (ii). . . . .	40
3.5	Erreur d'estimation de $x_3$ et $x_4$ pour le cas (ii). . . . .	40
3.6	Entrée optimale et valeurs propres maximales de $P$ pour le cas (ii). . . . .	40
3.7	Entrée optimale et valeurs propres de la matrice de Riccati . . . . .	48
3.8	Etats du système et estimation des erreurs. . . . .	48
3.9	Norme de l'erreur d'estimation et traces de la solution de Riccati. . . . .	49
3.10	Normes de chaque erreur d'estimation et plus petites valeurs propres du grammien d'observabilité pour des fenêtres de 4 pas. . . . .	49
4.1	Fuite localisée à $x_f$ . . . . .	57
4.2	Canalisation avec une obstruction ponctuelle . . . . .	58
4.3	Discretisation spatiale d'une canalisation . . . . .	59
4.4	Nomenclature pour pressions et débits lors d'un raccordement . . . . .	63
4.5	Obstruction d'aire transversale $A_b$ et vanne avec ouverture $u$ . . . . .	65

4.6	Canalisation avec une fuite de débit $Q_L$ . . . . .	66
4.7	Canalisation avec une fuite . . . . .	67
4.8	Croquis des éléments pour la détection d'une obstruction ponctuelle . . . . .	70
4.9	Réponse fréquentiel de la pression et sa PPFR avant la vanne . . . . .	70
4.10	Schéma pour la modélisation des éléments d'une obstruction ponctuelle . . . . .	71
4.11	PPFR à l'amont de la vanne pour différentes positions d'une obstruction . . . . .	72
5.1	Schéma du système avec discrétisation spatiale de la canalisation . . . . .	76
5.2	Données réelles comparées aux résultats de simulation . . . . .	78
5.3	Canalisation avec une obstruction étendue sur une longueur $l_0$ . . . . .	79
5.4	Croquis des éléments pour la détection d'une obstruction ponctuelle . . . . .	81
5.5	Grille décalée, non-symétrique et unidimensionnelle . . . . .	82
5.6	Fuite avec un débit $Q_F$ et à la position $f + 1/2$ sur la grille non-uniforme . . . . .	83
5.7	Obstruction d'aire $A_b$ et indice $o$ sur une grille asymétrique . . . . .	84
5.8	Obstruction étendue d'aire $A_b$ qui commence et finit aux nœud $o_1$ et $o_2$ . . . . .	84
5.9	Définition des pseudo-paramètres aux limites de la canalisation . . . . .	85
5.10	Comparaison numérique entre les réponses fréquentielles : échelle logarithmique . . . . .	88
5.11	Erreurs entre modèles pour deux positions $x = 11/16L$ et $x = 15/16L$ . . . . .	88
6.1	Système . . . . .	93
6.2	Erreurs d'estimation des états $H_{in}$ et $Q_{out}$ et évolutions des états $F$ et $Q_{in}$ avec leurs estimations . . . . .	95
6.3	Canalisation avec une obstruction étendue sur une longueur $l_0$ . . . . .	95
6.4	Mesure de la variable de sortie $Q_{out}$ et l'entrée optimale persistante $H_{out}$ . . . . .	97
6.5	Erreurs d'estimations des variables $H_{in}$ et $Q_{out}$ et variables $F$ et $Q_{in}$ avec leurs estimations. . . . .	97
6.6	Variables $f$ , son estimation et les plus petites valeurs propres de chaque gram-mien d'observabilité . . . . .	97
6.7	Schéma du système pompe-canalisation avec la discrétisation spatiale . . . . .	98

6.8	Estimation de la taille et position d'une fuite sans et avec bruit additionné . . .	100
6.9	Estimations de la taille et la position d'une fuite dans trois différents scénarios .	101
6.10	Estimation en présence de bruit et en présence d'inexactitudes paramétriques .	101
6.11	Schéma d'une canalisation avec une possible obstruction . . . . .	102
6.12	Simulation des pressions et débits sous une obstruction (comportements principaux). . . . .	104
6.13	Mesure bruitée de $H_1$ . . . . .	105
6.14	Détection d'une obstruction et son aire transversale via l'estimation de $x_6$ . . .	105
6.15	Profil de l'entrée $u_1$ pour la localisation et effets sur la sortie. . . . .	106
6.16	Estimation de la position de l'obstruction. . . . .	107
6.17	Surveillance d'une obstruction. . . . .	107
6.18	Système d'une canalisation alimentée par une pompe avec une obstruction. . .	108
6.19	Simulation d'une obstruction dans deux positions et deux tailles différentes. .	111
6.20	Croquis des éléments pour la détection d'une obstruction ponctuelle ou d'une fuite . . . . .	112
6.21	Croquis des éléments pour la détection d'une obstruction ponctuelle ou d'une fuite . . . . .	112
6.22	Sensibilité de la pression à l'amont de la vanne pour différentes tailles et positions d'obstructions . . . . .	115
6.23	Sensibilité de la pression à l'amont de la vanne pour différentes tailles et positions de fuites . . . . .	116
6.24	Pressions à l'amont de la vanne pour un coefficient de frottement $f = 0.5$ . . .	116
6.25	Surface de la fonction coût en fonction de la taille et la position d'une obstruction.	118
6.26	Vues verticales de la figure 6.25, plus le gris est foncé plus petite est la valeur de la fonction . . . . .	118
6.27	Zoom de la figure 6.26 autour du minimal global, on peut voir apparaître les minimaux locaux. . . . .	119
6.28	Valeurs de la fonction $G^*(x)$ par rapport à la position de l'obstruction en supposant la taille connue, on remarque que la fonction n'est pas différentiable sur le minimal. . . . .	119

---

6.29	Croquis et schéma pour la détection d'une obstruction étendue. . . . .	120
6.30	Surface générée par la fonction de coût quand la longueur et le coefficient de frottement sont connus. . . . .	124
6.31	Courbes de la fonction de coût pour différentes longueurs et différents coefficients de frottement. . . . .	124
6.32	Croquis d'une canalisation avec une fuite et une obstruction simultanées excitée par deux vannes oscillantes. . . . .	125
6.33	Région de validité de chaque modèle, pour les deux modèles $x_{obs} \neq x_{fui}$ . . . .	125
6.34	Schéma des deux modèles pour la détection simultanée de fuite et obstruction. .	126
6.35	Surfaces générées par la fonction de coût à minimiser en supposant les paramètres de la fuite ou de l'obstruction connus . . . . .	129
6.36	Schéma de la configuration pour la détection de défauts. . . . .	130
6.37	Schéma de l'algorithme de localisation d'obstruction. . . . .	130
6.38	Fonction coût des moindres carrés par rapport à différentes positions. . . . .	131
6.39	Fonction coût des moindres carrés par rapport à différentes positions. . . . .	132

# Liste des tableaux

2.1	Valeurs des paramètres du système, de l'observateur et de l'entrée . . . . .	24
2.2	$G_\alpha$ et l'erreur quadratique sur $X_3$ . . . . .	25
2.3	Valeurs des paramètres du système, de l'observateur et de l'entrée . . . . .	30
2.4	Paramètres de réglage de l'algorithme et de l'observateur . . . . .	31
3.1	Paramètres constants du système . . . . .	38
4.1	Exemples de Lois d'ouvrages . . . . .	56
4.2	Différents modèles de discrétisation dépendant des conditions aux limites . . . .	60
4.3	Données d'une canalisation avec une obstruction ([70]) . . . . .	72
5.1	Paramètres du prototype de canalisation considéré [8]. . . . .	77
5.2	Moyenne de la variation de l'énergie pour chaque sortie de chaque modèle . . . .	81
6.1	Paramètres constants du système . . . . .	93
6.2	Limites sur l'entrée du système . . . . .	93
6.3	Paramètres de la canalisation. . . . .	101
6.4	Paramètres de la canalisation prototype décrite dans [8]. . . . .	104
6.5	Robustesse au bruit en fonction de l'excitation . . . . .	120



# Introduction générale

Les réseaux de canalisation correspondent à la façon la plus économique de transporter des fluides. Cependant, la survenue d'un défaut, (tel qu'une fuite ou une obstruction) peut entraîner des pertes de produit, des surconsommations, ou encore de graves dommages environnementaux qu'il serait évidemment préférable d'éviter. Par conséquent, le problème de détection et localisation de défauts est un enjeu très important pour n'importe quelle industrie qui transporte des fluides à travers des canalisations [7, 41].

Quels que soient le niveau de sécurité visé et les moyens mis en œuvre pour l'obtenir, l'accident reste toujours possible. Les risques majeurs de défaillance des canalisations sont liés aux agressions (volontaires ou involontaires) de tiers et à la corrosion interne ou externe. Puisque les défauts sont inévitables, tous les systèmes de transport de fluides devraient être équipés d'un procédé de surveillance pour la détection de ces derniers, afin d'éviter les catastrophes, ou tout au moins, en diminuer les effets non souhaitables.

Il existe différentes approches concernant la détection de défauts pour les systèmes dynamiques en général [21, 30, 56], mais aussi pour les systèmes d'écoulement en particulier [32]. Pour ce qui est de ce mémoire, comme il est spécifié dans le titre, c'est l'approche par observateurs non linéaires qui est considérée.

Les observateurs d'état sont en effet des outils bien connus dans l'étude des systèmes dynamiques, notamment pour leur utilité dans les lois de commande par bouclage, mais aussi pour leur utilisation possible en surveillance. Leur synthèse dans le cas de systèmes non linéaires reste néanmoins elle-même un enjeu important en Automatique, qui suscite un nombre croissant de travaux [18, 23, 87, 55, 73, 54, 3, 96, 5, 6, 4, 51, 52]. Le problème de la sensibilité aux entrées appliquées est en particulier spécifique à certains de ces cas, et il se pose justement dans le contexte de la détection de défauts dans les pipelines [98, 106, 107].

La thèse est donc construite en deux parties : la première, plus spécialement dédié à la synthèse d'observateurs – proposant en particulier des solutions face au problème des entrées, et la seconde à la détection et localisation de défauts dans les pipelines – s'appuyant entre autres sur certains des résultats proposés pour les observateurs.

Plus précisément, la première partie débute avec les rappels importants pour la thèse sur l'observation au chapitre 1, en soulignant plus particulièrement le problème des entrées qui engendre la classification des systèmes non-linéaires en systèmes *uniformément observables* et *non uniformément observables* respectivement. Pour le second cas, des conditions sur l'entrée pour permettre l'observation sont rappelées en termes de *Grammien*, ainsi que des synthèses d'*observateurs de type Kalman* associés. En pratique néanmoins, dans la plupart des cas ces conditions d'observabilité ne sont vérifiées qu'*a posteriori*, typiquement par le fait que l'observateur fonctionne bien. Le choix d'une bonne entrée *a priori* reste un problème ouvert. Nous l'abordons ici comme un nouveau concept d'*observation par commande d'observabilité*, qui constitue la contribution principale de cette partie. L'idée est en fait de commander le



système pour pouvoir l'observer, ou garantir une "bonne" entrée. Cette problématique a été très peu explorée dans le domaine de l'observation, et plus dans celui de l'identification. On peut notamment citer les tous récents travaux de [40, 39, 77, 36] à cet égard.

Une première approche consiste à chercher à optimiser directement le grammien d'observabilité par l'entrée, et c'est l'objet du chapitre 2. On y propose deux algorithmes, l'un qui peut se résoudre hors-ligne, pour une classe de systèmes affines en l'état, et un autre qui doit être implanté en-ligne, mais qui a la possibilité d'être appliqué à des systèmes de structures plus larges. Le dernier chapitre de la première partie, le chapitre 3, explore alors une autre approche, basée sur l'idée de chercher l'entrée comme un problème de commande optimale pour une équation dynamique telle que celle du gain d'un observateur. En se basant par exemple sur la solution du filtre de Kalman, qui est optimale par rapport au bruit, on peut de plus optimiser l'entrée vis-à-vis de l'observabilité.

Les observateurs présentés avec les algorithmes correspondant pour garantir l'observabilité du système peuvent en particulier être utilisés pour la détection et la localisation de défauts dans les pipelines, et des exemples illustratifs de ce domaine sont inclus dans chacun des chapitre 2 et 3. Ce type d'application est alors repris plus spécifiquement dans la deuxième partie de la thèse, avec deux enjeux notamment : la détection de fuite ou d'obstruction dans les canalisations sous pression d'une part, et leur localisation d'autre part.

Cette deuxième partie commence donc au chapitre 4 par un rappel des équations du coup de bélier (équations aux dérivées partielles) qui décrivent les dynamiques de fluides sous pression, des modèles associés disponibles dans la littérature (principalement des approximations temporelles par différences finies, ou une représentation fréquentielle), ainsi que de quelques techniques de surveillance de fuite qui existent déjà également (à base d'observateur). Le chapitre 5 discute alors de plusieurs extensions possibles de ces modèles, prenant en compte l'instrumentation ou l'apparition d'obstruction dans les schémas par différences finies par exemple, étudiant leur sensibilité aux défauts, ou proposant l'utilisation de schémas implicites. Le chapitre 6 présente enfin de nouvelles méthodologies pour la détection de défauts dans une canalisation sous pression, en utilisant les modèles développés au chapitre antérieur ainsi que des algorithmes pour commander l'observabilité de la première partie.

Ce manuscrit se termine par des conclusions générales qui en récapitulent les grandes lignes et des propositions des perspectives à ce travail.

Il convient de préciser que la deuxième partie de cette thèse a été développée dans une large part en collaboration avec Marcos Guillén, Jean-François Dulhoste et Rafael Santos, de l'Université des Andes à Merida, au Venezuela, dans le cadre d'une collaboration Ecos-Nord (programme V11M02/PI-20100003030 Fonacit Fundaycucho) Venezuela).

En résumé, les principales contributions de la thèse sont :

- Première partie :
  - 1- I. RUBIO SCOLA, G. BESANÇON et D. GEORGES. "Input optimization for Observability of State Affine Systems". In : *5th IFAC Symposium on Systems Structure and Control*.

Grenoble, France, 2013

- 2- I. RUBIO SCOLA, G. BESANÇON et D. GEORGES. “Online observability optimization for state affine systems with output injection and observer design”. In : *Control & Automation (MED), 2013 21st Mediterranean Conference on*. IEEE. 2013, p. 609–614
- 3- G. BESANÇON, I. RUBIO SCOLA et D. GEORGES. “Input selection in observer design for nonuniformly observable systems”. In : *9th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*. 2013

Publication en revue en cours de correction : I. RUBIO SCOLA, G. BESANÇON et D. GEORGES. “Optimal input for non-uniformly observable state-affine systems”

- Deuxième partie :

- 1- G. BESANÇON, M. GUILLEN, J.-f. DULHOSTE, R. SANTOS et I. RUBIO SCOLA. “Pipeline partial blockage modeling and identification”. In : *Adaptation and Learning in Control and Signal Processing*. T. 11. 1. 2013, p. 730–735
- 2- G. BESANÇON, I. RUBIO SCOLA, M. GUILLÉN, J.-F. DULHOSTE, R. SANTOS et D. GEORGES. “Observer-based detection and location of partial blockages in pipelines”. In : *Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol), 2013 Conference on*. IEEE. 2013, p. 694–699
- 3- M. GUILLÉN, J.-F. DULHOSTE, R. SANTOS, G. BESANÇON, I. RUBIO SCOLA et al. “Deteccion y localizacion de fugas basado en observadores utilizando un modelo de tuberia mejorado”. In : *Congreso Iberoamericano de Ingenieria Mecanica*. 2013
- 4- I. RUBIO SCOLA, G. BESANÇON, D. GEORGES, M. GUILLÉN, J.-F. DULHOSTE, R. SANTOS et al. “Sensitivity analysis of end pressures and flows with respect to a blockage inside a pipeline.” In : *XII International Congress on Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences*. 2014
- 5- I. RUBIO SCOLA, G. BESANÇON, D. GEORGES, M. GUILLÉN, J.-F. DULHOSTE et R. SANTOS. “On the design of a nonlinear state observer for the location of a blockage in a pipeline”. In : *XII International Congress on Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences*. (2014)
- 6- M. GUILLÉN, J.-F. DULHOSTE, R. SANTOS, I. RUBIO SCOLA, G. BESANÇON, D. GEORGES et al. “Modelo dinámico para la detección y localización de obstrucciones parciales en tuberías”. In : *Congreso Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas*. 2014
- 7- M. GUILLÉN, J.-F. DULHOSTE, G. BESANÇON, I. RUBIO SCOLA, R. SANTOS et D. GEORGES. “Leak Detection and Location Based on Improved Pipe Model and Nonlinear Observer”. In : *Proceedings of the ECC 2014*. Strasbourg, France, 2014

Soumis : I. RUBIO SCOLA, G. BESANÇON et D. GEORGES. “Frequency-model-based obstruction detection and location in a pipeline by output error minimization”. 9th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes

Publication en revue en cours de correction : I. RUBIO SCOLA, G. BESANÇON et D. GEORGES. “Simultaneous Leak and Blockage Detection in Pipelines Using the Frequency Response Model : An Optimisation Study”



## Première partie

# Contributions à l'observation par “commande d'observabilité”



# Rappel Observateurs non-linéaires

---

## Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Introduction et notations de base . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>1.2</b>	<b>Problème d'observation, observabilité, et Grammien . . . . .</b>	<b>9</b>
<b>1.3</b>	<b>Observateurs de type Kalman . . . . .</b>	<b>13</b>
1.3.1	Observateur de Kalman et Kalman Etendu (EKF) . . . . .	13
1.3.2	Observateur pour système à structure affine en l'état . . . . .	14
1.3.3	Observateur pour système affine en l'état à perturbation additive trian- gulaire . . . . .	15
<b>1.4</b>	<b>Grammien et observateurs de type Kalman en temps discret . . . . .</b>	<b>16</b>
<b>1.5</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>18</b>

---

Ce chapitre vise à introduire les notations de base et à rappeler les outils sur l'observation de systèmes non linéaires qui seront utilisés tout au long de ce manuscrit. Il s'appuie notamment sur la référence [18] qui peut être consultée pour tout complément d'information.

Après une entrée en matière générale sur le problème d'observation, les rappels se focalisent sur le problème de sa dépendance vis-à-vis de l'entrée appliquée, qui est un des points centraux de motivation pour les développements de cette thèse. La notion de Grammien est en particulier discutée à ce sujet, et différentes structures d'observateur s'appuyant dessus sont rappelées.

Si la plupart des notions et résultats disponibles sont présentés pour des systèmes en temps continu par commodité, leur application dans la suite du manuscrit sera pour une bonne part faite en temps discret, et les éléments utiles à ce passage en discret sont récapitulés en fin de chapitre.

## 1.1 Introduction et notations de base

Tout processus physique peut être modélisé en le considérant comme un système. Dans notre approche un ensemble de variables pertinentes décrivent l'évolution de l'état du système par rapport au temps (nommé  $t$ ). Celles-ci sont appelées *variables d'état*. Le système interagit avec le monde extérieur de trois différentes façons :

- Les *variables d'entrée ou de commande* : ce sont les quantités qui ont un effet sur le comportement du système et qui peuvent être imposées depuis l'extérieur ; habituellement on les note  $u(t) \in \mathbf{U} \in \mathbb{R}^m$ .
- Les *variables de sortie ou mesures* : ce sont les quantités que l'on peut surveiller ; généralement elles sont un sous-ensemble ou une combinaison des variables d'état et elles sont désignées par  $y(t) \in \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^p$ .
- Les *perturbations* : ce sont des variables d'entrées mais qui ne sont pas commandées, et la plupart du temps sont aussi non mesurables ; elles incluent notamment les bruits, et seront le plus souvent omises dans les équations .

Les variables d'état sont représentées par un vecteur multidimensionnel, nommé  $x(t) \in \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ . Généralement l'évolution de  $x(t)$  par rapport au temps est modélisée par un système différentiel de premier ordre <sup>1</sup> :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t). \quad (1.1)$$

La relation entre les variables d'état et les variables de sorties, est décrite par l'application :

$$y(t) = h(x(t), u(t), t). \quad (1.2)$$

Un système est donc défini comme un ensemble de deux équations de la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = h(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad (1.3)$$

Les fonctions  $f$  et  $h$  sont supposées être  $C^\infty$  par rapport à leur arguments, et les fonctions d'entrées sont en général supposées comme étant des fonctions mesurables et bornées dans un ensemble  $\mathcal{X}$ .

Quelques exemples de systèmes particuliers :

- Systèmes affines en la commande :

$$f(x, u) = f_0(x) + g(x)u$$

---

1. On ne considère pas le cas des équations différentielles algébriques ou le cas qui sera vu ultérieurement des équations aux dérivées partielles.

- Systèmes affines en l'état<sup>2</sup>

$$f(x, u) = A(u)x + B(u), \quad h(x) = Cx \text{ (ou } C(u)x + D(u)) \quad (1.4)$$

- Systèmes linéaires variant dans le temps (LTV)

$$f(x, u, t) = A(t)x + B(t)u, \quad h(x, u, t) = C(t)x + D(t)u \quad (1.5)$$

- Systèmes linéaires invariant dans le temps (LTI)

$$f(x, u) = Ax + Bu, \quad h(x, u) = Cx + Du \quad (1.6)$$

## 1.2 Problème d'observation, observabilité, et Grammien

• **Problème d'observation** : supposant qu'on ne peut pas connaître tous les états internes du système à partir des variables de sortie à un temps donné, ce qui veut dire que  $h$  n'est pas inversible par rapport à  $x$  pour tout temps, mais que l'on a besoin (par exemple pour des raisons de surveillance ou de commande), alors le problème d'observation se pose comme :

*Étant donné un système décrit par les équations (1.3), trouver une estimation  $\hat{x}(t)$  pour  $x(t)$  à partir de la connaissance de  $u(\tau)$  et  $y(\tau)$  pour  $0 \leq \tau \leq t$ .*

Le problème peut être abordé directement par optimisation, en cherchant la meilleure estimation  $\hat{x}(0)$  de  $x(0)$  qui minimise l'écart de sortie entre la mesure  $y(t)$  sur  $[0, t)$ , et la sortie construite à partir de  $\hat{x}(0)$  et 1.3 (parfois appelé "problème inverse").

$$\min_{\hat{x}_0} \int_0^t \|h(\hat{x}(\tau), u(\tau), \tau) - y(\tau)\|^2 d\tau \quad (1.7)$$

Dans certains cas, une solution peut être obtenue sous la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) + k(t)(h(\hat{x}(t)) - y(t)), \quad \text{avec } k(t, 0) = 0.$$

avec  $k(t)$  tel que pour  $\hat{x}(0) \neq x(0)$  l'erreur d'estimation  $\hat{x}(t) - x(t)$  tendre vers zéro quand  $t$  tend vers l'infinie.

Ce système auxiliaire est alors appelé *un observateur asymptotique* et il peut plus généralement être défini comme suit [18] :

**Définition 1.1.** *Considérant un système (1.3), un observateur est donné par le système auxiliaire :*

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = F(\hat{x}(t), u(t), y(t), t) \\ \hat{x}(t) = H(\hat{x}(t), u(t), y(t), t) \end{cases} \quad (1.8)$$

---

2. Un cas particulier est celui des systèmes bilinéaires où les matrices A, B, C, D sont linéaires par rapport à  $u$



de telle sorte que :

- (i)  $\hat{x}(0) = x(0) \Rightarrow \hat{x}(t) = x(t), \forall t \geq 0$
- (ii)  $\|\hat{x}(t) - x(t)\| \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ ;

Si (ii) est vrai pour tout  $x(0)$ ,  $\hat{x}(0)$ , alors l'observateur est global.

Si (ii) est vrai avec une convergence exponentielle, alors l'observateur est exponentiel.

Si (ii) est vrai avec une convergence exponentielle et réglable, alors l'observateur est réglable.

Selon les notations de (1.3) et (1.8), la différence  $\hat{x}(t) - x(t)$  est appelée *erreur d'observation*.

Les conditions pour l'existence d'une solution au problème d'observation sont donnés par la notion d'observabilité.

• **Observabilité** : cette notion caractérise le fait que l'information de l'état initial est effectivement portée par les variables de sortie au cours du temps.

Dans le cas des systèmes LTI (1.6), l'observabilité dépend exclusivement des matrices d'état  $A$  et de sortie  $C$  du système (*condition de rang de Kalman* [57]).

Plus généralement, elle peut être définie à partir de la notion d'*indiscernabilité* [18] :

**Définition 1.2** (Indiscernabilité).

Une paire  $(x_0, x'_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  sera dite *indiscernable* par  $u$  si les solutions  $x(t)$  et  $x'(t)$  à partir de  $x_0, x'_0$  vérifient.

$$\forall u \in \mathcal{U}, \forall t \geq 0, h(x(t)) = h(x'(t)).$$

Un état  $x$  est *indiscernable* de  $x_0$  si la paire  $(x, x_0)$  est *indiscernable*.

À partir de cette définition on peut définir l'observabilité comme :

**Définition 1.3** (Observabilité).

Un système (1.3) est *observable* s'il n'admet aucune paire *indiscernable*.

De cette définition, il apparaît que l'observabilité peut dépendre de l'entrée appliquée.

Les systèmes pour lesquels toutes les entrées permettent de retrouver l'état initial sont appelés *uniformément observables* et ces entrées sont appelées *entrées universelles*.

**Définition 1.4** (Entrée universelle).

Une entrée  $u$  est dite *entrée universelle* pour un système (1.3) si et seulement si pour tout  $x_0 \neq x'_0$ ,

$$\exists t \geq 0 : h(x(t), u(t)) \neq h(x'(t), u(t))$$

Une entrée est dite *singulière* si elle n'est pas universelle.

**Définition 1.5** (Systèmes uniformément observable).

Un système est *uniformément observable* si toute entrée est universelle.

Dans le cas d'un système qui n'est pas uniformément observable, qu'une entrée soit universelle sur une fenêtre de temps  $[0, t]$  n'est pas suffisant, pour reconstruire l'état en tout temps. Prenons comme exemple un système 1.4 avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{u} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = [1 \quad 0]$$

Pour ce système si  $u(t) = 2$  pour  $[0, t]$  et  $u(t) = 0$  pour  $t_1 > t$ , et si une perturbation arrive après  $t_1$ , alors l'observateur ne pourra plus corriger l'état estimé.

Pour surmonter ce problème, la notion de *persistance* de l'entrée a été introduite [22] et pour les systèmes de type affine en l'état, elle peut être caractérisé à partir de la notion du Grammien d'observabilité.

• Grammien d'observabilité : le grammien d'observabilité représente la sensibilité des variables de sortie du système, par rapport à la condition initiale en termes d'énergie, quand le système évolue librement depuis une condition initiale  $x_0$  au temps  $t = t_0 = 0$  jusqu'à un temps  $t = t_1 > t_0$ .

En considérant un système non linéaire

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(u, x) \\ y &= h(u, x) \end{aligned} \tag{1.9}$$

le grammien d'observabilité est donc donné par :

$$\Gamma(t_0, t_1) = \frac{\partial E}{\partial x_0} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial y}{\partial x_0}^T \frac{\partial y}{\partial x_0} dt = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_0}^T \right) \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_0} dt \tag{1.10}$$

où  $x$  désigne la solution de 1.9 initialisé en  $x_0$  à  $t = t_0$ .

Dans le cas des systèmes affines en l'état (1.4), qui seront largement considérés dans ce manuscrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= C \\ \frac{\partial x}{\partial x_0} &= \Phi_u(t, t_0) \end{aligned} \tag{1.11}$$

où  $\Phi_u(t, t_0)$  est la matrice de transition (fonction de l'entrée) du système, définie par :

$$\frac{d\Phi_u(\tau, t)}{d\tau} = A(u(\tau))\Phi_u(\tau, t), \quad \Phi_u(t, t) = I \tag{1.12}$$

La sortie d'un système affine en l'état peut se calculer à l'instant  $t$  par :

$$y(t) = C\Phi_u(t, t_0)x_0$$

et l'énergie de la sortie entre  $t_0$  et  $t_1$  est donc :

$$E_y = \int_{t_0}^{t_1} \|y(\tau)\|^2 d\tau = \int_{t_0}^{t_1} y(\tau)^T y(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_1} x_0^T \Phi_u(\tau, t_0)^T C^T C \Phi_u(\tau, t_0) x_0 d\tau \quad (1.13)$$

Donc en appliquant l'équation (1.10), le grammien peut s'écrire :

$$\Gamma(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi_u(\tau, t_0)^T C^T C \Phi_u(\tau, t_0) d\tau \quad (1.14)$$

A partir de cette notion, on peut caractériser la notion de persistance d'entrée selon un niveau de sensibilité au sens du grammien garanti au cours du temps (voir [18] par exemple) :

**Définition 1.6.** *Une entrée est régulièrement persistante pour un système affine en l'état (1.4) si :*

$$\exists t_0, T, \alpha : \int_{t-T}^t \Phi_u^T(\tau, t-T) C^T C \Phi_u(\tau, t-T) d\tau \geq \alpha I > 0 \quad \forall t \geq t_0, \quad (1.15)$$

Dans le cas où la persistance est garantie en temps arbitrairement court, on a

**Définition 1.7.** *Une entrée est localement régulière pour un système affine en l'état (1.4) si :*

$$\exists t_0, \alpha : \forall T \leq T_0, \forall t \geq T, \quad \int_{t-T}^t \Phi_u^T(\tau, t-T) C^T C \Phi_u(\tau, t-T) d\tau \geq \alpha \frac{1}{T} \begin{pmatrix} T & & & 0 \\ & T & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & T^n \end{pmatrix}^2 \quad (1.16)$$

Revenant à l'équation de l'énergie de la sortie (1.13), on peut déduire que  $E_y = x_0^T \Gamma(t_0, t_1) x_0$ , l'énergie de sortie due à la condition initiale est redistribuée au cours du temps par le grammien d'observabilité.

Le grammien d'observabilité (1.14) ayant une structure quadratique dont toutes les valeurs propres sont non-négatives, et en analysant ses vecteurs propres et valeurs, on peut montrer [71] que les états correspondants aux plus grandes valeurs propres sont les plus observables et que les états dans le noyau du grammien appartiennent à l'espace non-observable du système.

Enfin, d'après (1.14) il est facile de vérifier que le grammien d'observabilité  $\Gamma(t_0, t_1)$  est la solution symétrique et définie positive, obtenue au temps  $t = t_0$  de l'équation différentielle de Lyapunov [44, 45] :

$$\dot{W}_0 = A(u)^T W_0 + W_0 A(u) + C^T C$$

avec  $W_0(t_1) = 0$ .

## 1.3 Observateurs de type Kalman

Pour les systèmes linéaires de type LTI (1.6) ou LTV (1.5) les solutions au problème de synthèse d'observateur sont bien connus depuis les travaux initiaux de Luenberger [64] et Kalman [57]. Dans cette partie nous allons rappeler les extensions au cas non linéaire qui seront utiles par la suite et qui s'appuient sur la forme connu comme observateur de Kalman (voir [18]).

### 1.3.1 Observateur de Kalman et Kalman Étendu (EKF)

Pour les systèmes LTV (1.5), on a le résultat suivant :

**Théorème 1.1** (Observateur de Kalman pour des systèmes à temps variants).

*Si le système (1.5) vérifie une condition de Grammien (1.15), alors il existe un observateur de la forme :*

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x} + B(t)u(t) - K(t)(C(t)\hat{x} - y(t))$$

avec la matrice  $K(t)$  donné par :

$$\begin{aligned} \dot{M} &= A(t)M + M(t)A(t)^T - M(t)C(t)^T W^{-1} C(t)M(t) + V + \delta M(t) \\ K(t) &= M(t)C^T W^{-1} \\ M(0) &= M_0 = M_0^T > 0 \\ W &= W^T > 0 \end{aligned} \tag{1.17}$$

avec  $\delta > 2\|A(t)\|$  pour tout  $t$  ou  $V^T = V > 0$ .

On peut rappeler que dans le cas où l'équation d'état est perturbée par un bruit additif, blanc gaussien, de covariance  $Q$ , et l'équation de sortie par un bruit décorréllé du précédent de même nature, et covariance  $R$ , alors (1.17) donne l'estimation  $\hat{x}$  qui minimise la moyenne de l'erreur  $\hat{x} - x$  au carré, dès lors que  $V = Q$ ,  $W = R$  et  $\sigma = 0$  [60].

Une extension intuitive du théorème 1.1 pour des systèmes non-linéaires est le *Filtre de Kalman Étendu* (EKF), qui approche le système pour son linéarisé le long des trajectoires estimées :

**Définition 1.8** (Filtre de Kalman Étendu (EFK) [43]).

*Étant donné un système de la forme :*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t)) \end{aligned}$$

le filtre de Kalman étendu correspondant est :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}(t), u(t)) - K(t)(h(\hat{x}) - y(t))$$

avec  $K(t)$  calculé par les equations (1.17) en considérant :

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}(t), u(t)) \text{ et } C(t) = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}(t))$$

Cet observateur semble être une solution systématique pour les systèmes non-linéaires, mais il faut tenir compte que la convergence globale n'est généralement pas garantie ceci a l'analyse de structures spécifiques qui permettent construire des observateurs à convergence globale, on en présente quelques-uns ci-après (voir [18] pour plus de détails).

### 1.3.2 Observateur pour système à structure affine en l'état

On considère un système de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(u(t), y(t))x(t) + b(u(t), y(t)) \\ y &= C(u(t))x(t) \end{aligned} \tag{1.18}$$

où les matrices  $A(u(t), y(t))$ ,  $b(u(t), y(t))$  et  $C(u(t))$  sont bornées pour tout  $t$  et continues par morceaux. Un observateur de type Kalman pour ce système peut se construire comme suit [94] :

#### **Théorème 1.2.**

Si  $\bar{u}(t) = (u(t), y(t))$  est une entrée régulièrement persistante pour  $\dot{x} = A(\bar{u}(t))x(t)$ ,  $y(t) = C(\bar{u}(t))x(t)$  (définition 1.6), alors un observateur pour ce système est :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A(u(t), y(t))\hat{x}(t) + b(u(t), y(t)) - K(t)(C(u(t))\hat{x}(t) - y(t)) \\ \dot{M}(t) &= A(u(t), y(t))M(t) + M(t)A(u(t), y(t))^T \\ &\quad - C(u(t))^T W^{-1} C(u(t)) + \delta M(t) + M(t) V M(t) \\ M(0) &= M^T(0) > 0, \\ W &= W^T > 0 \\ K(t) &= M(t) C^T W^{-1} \end{aligned} \tag{1.19}$$

avec  $\delta > 2\|A(u(t), y(t))\|$  ou  $V = V^T > 0$ .

Dans le cas où  $A$  et  $B$  ne dépendent pas de  $y$ , (1.18) se réduit à un système affine (1.4) pour lequel (1.19) donne un observateur optimal au sens de Kalman vis à vis des bruits d'état et de sortie à condition que  $V$  et  $W$  soient choisies comme précédemment.

### 1.3.3 Observateur pour système affine en l'état à perturbation additive triangulaire

On considère ici un système sous la forme :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A(u(t), y(t))x(t) + \psi(u(t), x(t)) \\ y &= C(u(t))x(t) + \eta(u(t))\end{aligned}\quad (1.20)$$

où les matrices ont une structure particulière :

$$\begin{aligned}A(u(t), y(t)) &= \begin{bmatrix} 0 & A_{1,2}(u(t), y(t)) & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & & A_{q-1,q}(u(t), y(t)) \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \\ \psi(u(t), x(t)) &= \begin{bmatrix} \psi_1(u(t), x_1(t)) \\ \psi_2(u(t), x_1(t), x_2(t)) \\ \vdots \\ \psi_{q-1}(u(t), x_1(t), \dots, x_{q-1}(t)) \\ \psi_q(u(t), x(t)) \end{bmatrix} \\ C(u(t)) &= [C_1(u(t)) \quad 0 \quad \cdots \quad 0],\end{aligned}\quad (1.21)$$

avec  $x(t) = \text{col}(x_1(t), \dots, x_2(t)) \in \mathbb{R}^N$ ,  $z_i \in \mathbb{R}_i^N$  pour  $i = 1, 2, \dots, q$ ,  $A_{i-1,i} \in \mathbb{R}^{N_{i-1} \times N_i}$  pour  $i = 2, \dots, q$  et  $C_1(u) \in \mathbb{R}^{1 \times N_1}$ .

**Théorème 1.3** (Observateur type Kalman avec grand gain [95]).

Si un système (1.20), avec une structure (1.21), remplies les conditions suivantes :

- L'entrée  $u(t)$  telle que  $\bar{u} = (u, y)$  soit localement régulière pour  $\dot{x} = A(\bar{u})x$  avec  $A(\bar{u})$  bornée,
  - Les non linéarités  $\psi$  sont globalement Lipschitz en  $x$  et uniformément en  $u$ ,
- alors pour tout  $\delta > 0$  il existe  $\lambda, \gamma > 0$  tel que le système :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A(u(t), y(t))\hat{x}(t) + \psi(u, \hat{x}) - \Lambda(\lambda)K(t)(C(u(t))\hat{x} + \eta(u(t)) - y(t)) \\ \dot{M}(t) &= \lambda(M(t)A(u(t), y(t)) + A(u(t), y(t))^T M(t) - M(t)C^T W^{-1} C M(t) + \delta M(t)) \\ M(0) &= M^T(0) > 0, \quad W = W^T > 0 \\ K(t) &= M C(u(t))^T W^{-1}\end{aligned}\quad (1.22)$$

avec  $\delta > 2\|A(u, y)\|$ ,  $\lambda = \frac{1}{T}$  assez grand et

$$\Lambda(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda I_{N_1} & & & 0 \\ & \lambda^2 I_{N_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda^q I_{N_q} \end{bmatrix}\quad (1.23)$$

est un observateur qui pour tout  $\hat{x}(0) \in \mathbb{R}^N$  garantit, pour tout  $t \geq \frac{1}{\lambda}$ ,

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq \mu e^{-\sigma t} \quad (1.24)$$

avec  $\mu > 0$ .

Notons ici qu'un certain nombre des notions et résultats recensées ont une version analogue en temps discret, qui sera celle la plus utilisée dans la suite.

## 1.4 Grammien et observateurs de type Kalman en temps discret

Considérons ici des systèmes en temps discret sous la forme affine en l'état suivante :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A(u_k, y_k)x_k + B(u_k, y_k) \\ y_k &= C(u_k)x_k \end{aligned} \quad (1.25)$$

avec  $x_0$  comme condition initiale

où  $x$ ,  $u$ ,  $y$  et  $k$  sont, respectivement, le vecteur d'état, le vecteur d'entrées, le vecteur de sorties et le pas de temps de la discrétisation.

Pour ce type de structure, le problème d'observation peut être ramené au cas d'un système linéaire avec des paramètres variant dans le temps [95] :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k \\ y_k &= C_k x_k \end{aligned} \quad (1.26)$$

où  $A_k$ ,  $B_k$  et  $C_k$  sont des fonctions de  $k$  bornées.

Dans ce cas, la matrice de transition d'état est définie comme suit :

$$\Phi(k, k_0) = A_{k-1}A_{k-2} \cdots A_{k_0}, \quad \Phi(k, k) = I \quad (1.27)$$

En supposant que toutes les matrices  $A_k$  impliquées dans le produit sont inversibles,  $\Phi(k, k_0)$  admet une inverse, notée  $\Phi(k_0, k)$ .

L'observabilité du système peut de nouveau être caractérisé à partir du *grammien d'obser-*

*vabilité*, qui est une mesure de l'énergie de sa sortie, à l'instant  $k$ , quand on le laisse évoluer librement depuis une condition initiale  $x_0$  sur une fenêtre de  $\sigma$  pas de temps :

$$E_0 = \sum_{l=0}^N \|y_l\|^2 =: x_0^T \Gamma(N, 0) x_0. \quad (1.28)$$

où  $\Gamma$  correspond au grammien d'observabilité sur  $[0, N]$ .

Sur une fenêtre  $[k_1, k_2]$ , il est donc défini par :

$$\Gamma(k_2, k_1) = \sum_{l=k_1}^{k_2} \Phi(l, k_1)^T C_l^T C_l \Phi(l, k_1) \quad (1.29)$$

Il est de nouveau facile de vérifier que le grammien est aussi solution à  $k = k_1$  de l'équation (voir [27] pour plus de détails) :

$$\begin{aligned} W_k &= A_k^T W_{k+1} A_k + C_k^T C_k \\ W_{k_2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

En temps discret, la structure du grammien est donc aussi quadratique symétrique et semi défini positif, ce qui veut dire que ces valeurs propres sont positives ou nulles. L'observabilité est donc caractérisée par le fait que la plus petite valeur propre de  $\Gamma$  reste assez supérieure à zéro (définissant un certain *degré d'observabilité*) et les *entrées persistantes* peuvent à leur tour être définies comme suit (voir [95]).

**Définition 1.9.** *Une séquence d'entrée  $u_k$  est dite régulièrement persistante pour (1.25) si, pour toute condition initiale  $x_0$ , le système linéaire à temps variant représenté par (1.26) satisfait la propriété suivante :*

*il existe un entier  $\sigma$  tel que, pour tout  $k \geq 0$  :*

$$0 < \alpha_1 I_n \leq \Gamma(k, k - \sigma) \leq \alpha_2 I_n. \quad (1.31)$$

*pour des constantes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .*

•

Sous cette condition, un observateur exponentiel peut être conçu pour (1.25) comme suit (voir encore [95]) :



**Théorème 1.4.** *Étant donné un system (1.25), si la séquence d'entrées  $u_k$  est régulièrement persistante et permet l'inversibilité de  $A(u_k, y_k)$ , alors un observateur avec une convergence exponentielle et globale est donné par :*

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} - K_k(C(u_k)\hat{x}_{k|k-1} - y_k) \\
\hat{x}_{k+1|k} &= A(u_k, y_k)\hat{x}_{k|k} + B(u_k, y_k) \\
P_{k+1|k} &= \gamma^{-1}A(u_k, y_k)(P_{k|k-1} - K_kC(u_k)P_{k|k-1})A(u_k, y_k)^T \\
&\text{avec} \\
K_k &= P_{k|k-1}C(u_k)^T(C(u_k)P_{k|k-1}C(u_k)^T + R)^{-1} \\
P_{0|-1} &= P_{0|-1}^T > 0, \quad R = R^T > 0, \quad \text{et} \quad 0 < \gamma < 1
\end{aligned} \tag{1.32}$$

□

La vitesse de convergence peut être réglée par le paramètre  $\gamma$  (pour augmenter la vitesse de convergence il faut diminuer  $\gamma$ ).

**Remarque 1.1.** *On peut noter que la condition (1.31) n'est pas exactement sous la même forme que celle de [95], mais peut s'y ramener dès que lors que les matrices  $A_k$  sont bornés et inversibles.*

## 1.5 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons rappelé quelques conditions de base pour à l'observation des systèmes non linéaires, ainsi que certains résultats concernant la synthèse d'observateurs.

Nous avons en particulier mis l'accent sur les observateurs de type Kalman, en temps continu comme en temps discret, et les notions d'observabilité associés en termes de grammien.

Ces outils permettront de proposer dans la suite des stratégies de choix d'entrée permettant de garantir l'observabilité pour laquelle les observateurs convergent.

# Commande de l'observabilité en se basant sur le grammien

---

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>19</b>
<b>2.2</b>	<b>Structures affines en l'état</b>	<b>20</b>
2.2.1	Algorithme numérique	21
2.2.2	Exemple académique	23
2.2.3	Simulations	24
<b>2.3</b>	<b>Structures affines en l'état avec injection de la sortie</b>	<b>26</b>
2.3.1	Algorithme numérique	27
2.3.2	Exemple académique	28
2.3.3	Simulations	30
<b>2.4</b>	<b>Conclusions</b>	<b>31</b>

---

## 2.1 Introduction

Compte de l'enjeu lié aux entrées pour le bon fonctionnement de l'observateur on propose dans ce chapitre, deux méthodologies pour construire une entrée persistante pour des systèmes affines en l'état non-uniformément observables.

L'idée ici est de chercher une entrée par optimisation à partir d'un critère lié au grammien d'observabilité.

Premièrement sera présentée une technique qui permettra d'obtenir l'entrée persistante hors-ligne, c'est à dire que la matrice d'état et la matrice de sortie ne dépendront que de la variable d'entrée  $u$ .

Deuxièmement, on considère des systèmes affines en l'état avec la matrice d'état dépendante de l'entrée *et de la sortie*. Dans ce cas la solution de l'algorithme devra être calculée en temps réel car on ne peut pas prédire la sortie  $y(t)$  à cause de la méconnaissance du vecteur d'état  $x(t)$ .

Les deux algorithmes présentés se basent sur le grammien d'observabilité pour garantir un degré d'observabilité atteint au cours du temps.

## 2.2 Structures affines en l'état

L'objectif de ce paragraphe est de proposer une méthodologie pour pouvoir construire une entrée persistante qui garantisse la condition d'observabilité basée sur le grammien (1.31). Une fois l'observabilité du système garantie, un observateur peut être construit à partir de (1.32). Dans un premier temps le système sera considéré affine en l'état comme suit :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A(u_k)x_k + B(u_k, y_k) \\ y_k &= C(u_k)x_k \end{aligned} \quad (2.1)$$

avec  $x_0$  comme condition initiale

Pour certains systèmes, trouver une entrée persistante qui garantisse la condition du grammien (1.31) est assez facile. Notamment, si on considère deux exemples discrets de la forme (2.1) avec  $B = 0$  et  $A$  sous une des formes suivantes - où  $T_s$  est le temps d'échantillonnage [18] :

$$A_1(u_1) = \begin{bmatrix} 1 & T_s u_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$A_2(u_2) = \begin{bmatrix} 1 & T_s u_2 & T_s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

En calculant le grammien comme dans les équations (1.27) pour ces systèmes, il est facile de garantir l'observabilité dans le sens de la définition 1.9 aux conditions suivantes :

- la séquence d'entrée  $u_1$  est non identiquement nulle pour le cas du système (2.2) ;
- la différence entre deux éléments consécutifs de la séquence d'entrée  $u_2$  est non identiquement nulle pour le système (2.3).

Malheureusement pour des systèmes plus complexes, il n'est pas si facile de trouver analytiquement une entrée persistante appropriée. Comme solution à ce problème, on propose un algorithme d'optimisation hors-ligne qui va trouver une entrée persistante pour le système sur une fenêtre de temps de  $N$  pas.

Ceci exige un certain degré de commandabilité sur le grammien, que l'on va supposer satisfaite. En particulier,  $N$  devra être plus large que la dimension du système. Rappelons que les états d'un système discret totalement commandable peuvent tous être modifiés en  $M$

pas, où  $M$  est la dimension du système.

Il faut remarquer qu'en général il existe une quantité infinie d'entrées persistantes pour un système, c'est pour cela que dans l'ensemble des solutions possibles, nous proposons de nous concentrer sur celle d'énergie minimale.

En outre, étant donné que habituellement il existe des limites physiques sur l'entrée du système, l'algorithme devra les respecter. Trois types de contraintes sur la séquence d'entrée  $u_k$  seront considérés :

- une valeur maximale ( $U_{max}$ ) et une minimale ( $U_{min}$ ) pour chaque élément de la séquence d'entrée.
- une valeur maximale ( $T_2$ ) pour la fréquence de changement de l'entrée.
- une valeur absolue maximale ( $\delta U_{max}$ ) sur la différence entre deux éléments consécutifs de la séquence.

*Remarque :* La deuxième condition implique que le grammien devra être calculé sur des pas de temps égaux ou supérieurs à  $T_2$ , ceci n'affecte pas la valeur du grammien étant donné que la matrice d'état du système est invariante pendant l'intervalle  $T_2$  car elle ne dépend que de l'entrée.

Pour finir, pendant le régime normal d'opération du système, il peut exister une référence pour l'entrée, donc l'énergie considérée dans la fonction de coût de l'algorithme sera la différence entre le signal de référence ( $u_{ref}$ ) et l'entrée persistante recherchée ( $u_k$ ).

### 2.2.1 Algorithme numérique

Au vu des indications précédentes le problème d'optimisation considéré peut être résumé comme suit :

$$\begin{aligned}
 & \min_U \sum_{k=0}^{N-1} (u_{ref} - u_k)^2 \\
 & \Gamma(U) \succ \alpha I \\
 & U_{min} < u_k < U_{max}, \quad \text{pour } 0 \leq k \leq N-1 \\
 & |u_{k+1} - u_k| < \delta U_{max}, \quad \text{pour } 0 \leq k \leq N-2 \\
 & \text{avec} \\
 & U = [u_0, u_2, \dots, u_{N-2}, u_{N-1}]
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

où  $\Gamma(U)$  représente le grammien d'observabilité sur la fenêtre de temps  $[0, N-1]$  avec la séquence d'entrée  $U$  appliquée (comme définie par l'équation 1.29).

Si l'on veut utiliser un observateur à convergence exponentielle asymptotique, l'entrée doit être appliquée tout le temps, donc l'idée serait de répéter la même séquence d'entrée au cours du temps tout en respectant les conditions sur le grammien pour toute fenêtre de largeur  $N$  commençant à tout moment. Ceci peut s'obtenir en prolongeant le problème d'optimisation de  $N-1$  contraintes données par  $N-1$  grammien qui sont calculés avec leurs entrées respectives. Ces entrées sont définies par un déplacement circulaire des valeurs du vecteur d'entrée défini précédemment. La figure. 2.1 illustre ces entrées.

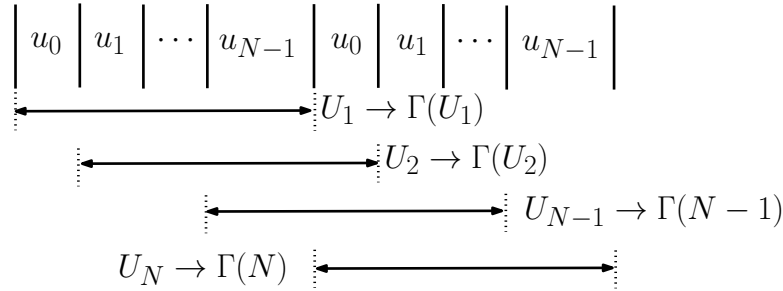


FIGURE 2.1 – Vecteur d'entrées par rapport à la fenêtre du grammien correspondant

En conséquence le problème d'optimisation à résoudre pour trouver une séquence d'entrées périodique, régulièrement persistante et optimale pour un système discret décrit par (2.1) est :

$$\begin{aligned}
 & \min_U \sum_{k=0}^{N-1} (u_{ref} - u_k)^2 \\
 & \Gamma(U_1) \succ \alpha I \\
 & \Gamma(U_2) \succ \alpha I \\
 & \vdots \\
 & \Gamma(U_h) \succ \alpha I \\
 & U_1 = [u_0, u_2, \dots, u_{N-2}, u_{N-1}] \\
 & U_2 = [u_1, u_2, \dots, u_{N-1}, u_0] \\
 & \vdots \\
 & U_{N-1} = [u_{N-1}, u_0, \dots, u_{N-3}, u_{N-2}] \\
 & Umin < u_k < Umax, \quad 0 \leq k \leq N-1 \\
 & |u_{k+1} - u_k| < \delta Umax, \quad 0 \leq k \leq N-2
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

avec  $U = [u_0, u_2, \dots, u_{N-2}, u_{N-1}]$  comme précédemment.

Pour chaque condition de chaque grammien une séquence  $U_k$  est déterminée, et chaque séquence est reliée à chacune des autres en déplaçant circulairement ces éléments, donc il existe

$N - 1$  solutions. Pour réduire le nombre possible de solutions et améliorer la convergence numérique, l'algorithme peut encore être modifié en introduisant des pondérations sur les éléments de  $U$  dans la fonction quadratique de coût proposé de façon heuristique comme suit :

$$\min_U \sum_{k=0}^{N-1} ((u_{ref} - u_k)(e^{-k} + 1))^2, \quad (2.6)$$

sous toutes les contraintes mentionnées précédemment.

Cet algorithme peut être maintenant illustré sur un exemple, avec les résultats de l'observateur correspondant.

### 2.2.2 Exemple académique

Comme avant-garde au sujet plus largement traité dans la deuxième partie de ce manuscrit, un exemple lié à la détection de fuites sur un pipeline est proposé ici. Le modèle correspondant sera donc plus complètement détaillé dans la suite , et pour l'instant on peut considérer qu'il s'agit d'un exemple académique.

Soit le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_2 - ax_3\sqrt{u} + ax_4 \\ \dot{x}_2 &= -b(u - x_1) - cx_2|x_2| \\ \dot{x}_3 &= 0 \\ \dot{x}_4 &= 0 \\ y &= x_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

où  $a, b, c$  sont des constantes et  $u$  une entrée positive. On peut le ré-écrire comme :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A(u)\bar{x} + B(u, y)u \\ y &= C\bar{x} \end{aligned} \quad (2.8)$$

avec les matrices :

$$A(u) = \begin{bmatrix} 0 & -a & -a\sqrt{u} & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$B(u, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ -bu - cy|y| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Les matrices (2.9) et (2.10) peuvent être discrétisées à partir de la matrice exponentielle donnée par [102] (aussi utilisée en [94]) :

$$\begin{bmatrix} A_k & B_k \\ 0 & I \end{bmatrix} = \exp \left\{ T_S \begin{bmatrix} A(k) & B(k) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}. \quad (2.12)$$

où  $0$  désigne une matrice bloqué nulle et  $I$  est l'identité matricielle, les deux avec les dimensions appropriées et  $T_S$  désigne le pas d'échantillonnage.

En utilisant les équations (1.32), un observateur est construit avec les paramètres de réglages  $R$  et  $\gamma$ . Le tableau 2.1 montre les valeurs numériques des paramètres du système et de l'observateur, comme ceux utilisés dans l'algorithme de construction de l'entrée persistante.

Paramètre	valeur	Paramètre	valeur
$a$	$4.896 \cdot 10^4$	Bruit	0.1%
$b$	42.048	$U_{min}$	2.8
$c$	$3.924 \cdot 10^{-4}$	$U_{max}$	3.2
$\gamma$	0.998	$\dot{U}_{max}$	1
$R$	1	$T_s$	0.2
$\alpha$	$3 \cdot 10^{-5}$	$N$	4

TABLE 2.1 – Valeurs des paramètres du système, de l'observateur et de l'entrée

### 2.2.3 Simulations

La résolution du problème d'optimisation pour l'entrée persistante et les simulations ont été réalisées avec Matlab 2012b<sup>®</sup>. La simulation commence avec des conditions initiales  $x_0 = [6, 4 \cdot 10^{-3}, 0, 4 \cdot 10^{-3}]^T$ , puis à  $t = 8 \text{ min}$ ,  $x_3$  est modifié de 0 à  $4 \cdot 10^{-5}$ , de même que  $x_4$  pour que la modification ne soit pas directement visible dans la sortie. Un bruit blanc gaussien est ajouté à la sortie mesurée, d'amplitude maximale à 0.1% de  $y$ . On peut apprécier l'entrée optimale ainsi que la sortie avec le bruit et son estimé sur la figure 2.2. Les figures 2.3 montrent les erreurs d'estimation sur les états  $x_1$  et  $x_2$  et les états estimés de  $x_3$  et  $x_4$ .

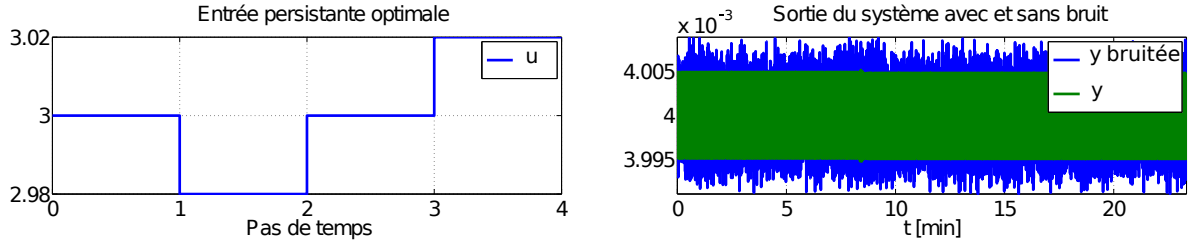
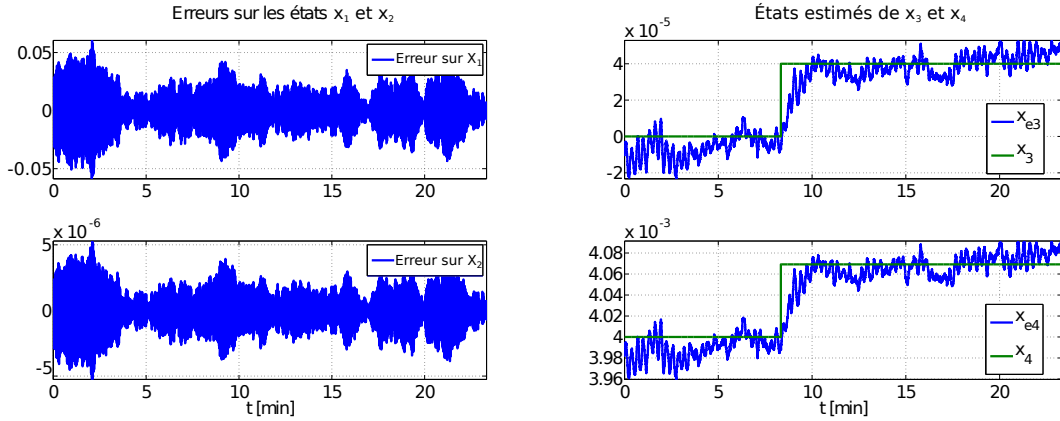


FIGURE 2.2 – Entrées persistante optimale et sortie bruitée

FIGURE 2.3 – Erreurs sur les états  $x_1$  et  $x_2$  et estimés des états  $x_3$  et  $x_4$ 

D'autres entrées persistantes peuvent être trouvées en variant les valeurs des paramètres de l'optimisation - le degré d'observabilité  $\alpha$  et le nombre de pas de temps de la fenêtre du grammien  $N$ . Une comparaison est faite entre l'erreur quadratique de l'estimation de  $x_3$  par rapport à l'énergie de l'entrée dans la table 2.2 pour plusieurs ratios  $G_\alpha = \frac{\alpha}{N}$ . En conclusion, réduire ce ratio implique réduire l'énergie de l'entrée mais aussi mène à une augmentation de l'erreur quadratique d'estimation.

Les différentes entrées correspondant aux valeurs de la table 2.2 sont montrées dans la figure 2.4, la première entrée est celle utilisée dans les résultats de la figure 2.3.

$G_\alpha$	Erreur quadratique	Énergie moyenne	N
$7.5 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$1.5753 \cdot 10^{-5}$	4
$7.5 \cdot 10^{-6}$	$7.1756 \cdot 10^{-5}$	$4.1115 \cdot 10^{-5}$	8
$3.75 \cdot 10^{-6}$	$1.0116 \cdot 10^{-4}$	$3.0666 \cdot 10^{-5}$	4
$3.75 \cdot 10^{-6}$	$3.5881 \cdot 10^{-5}$	$7.9278 \cdot 10^{-5}$	8
$1.875 \cdot 10^{-6}$	$5.0605 \cdot 10^{-5}$	$5.9010 \cdot 10^{-5}$	4
$1.875 \cdot 10^{-6}$	$1.7942 \cdot 10^{-5}$	$1.5470 \cdot 10^{-4}$	8

TABLE 2.2 –  $G_\alpha$  et l'erreur quadratique sur  $X_3$ 

On reviendra à ce type de système au chapitre 3 avec une autre approche.



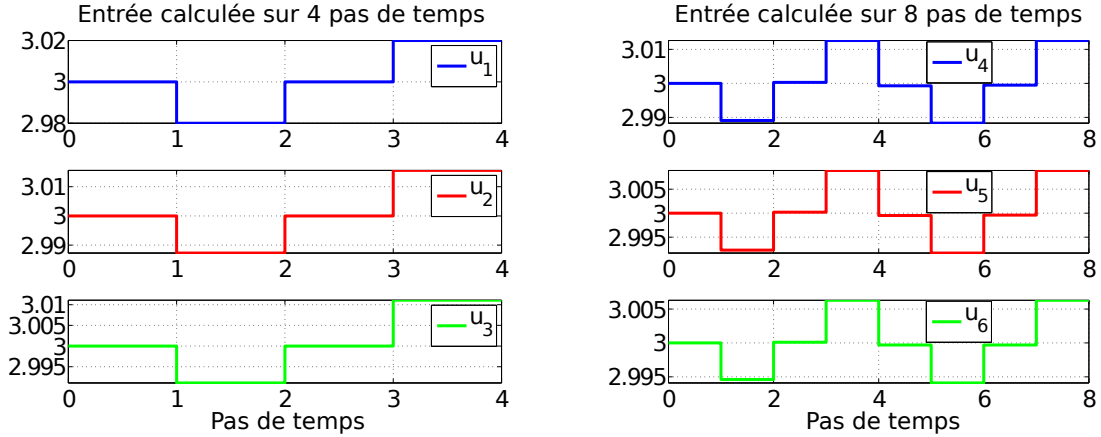


FIGURE 2.4 – Entrées persistantes pour les paramètres de la Table 2.2

D'ici là nous présentons une extension de l'idée d'optimiser le grammien à une classe plus large de systèmes au paragraphe suivant.

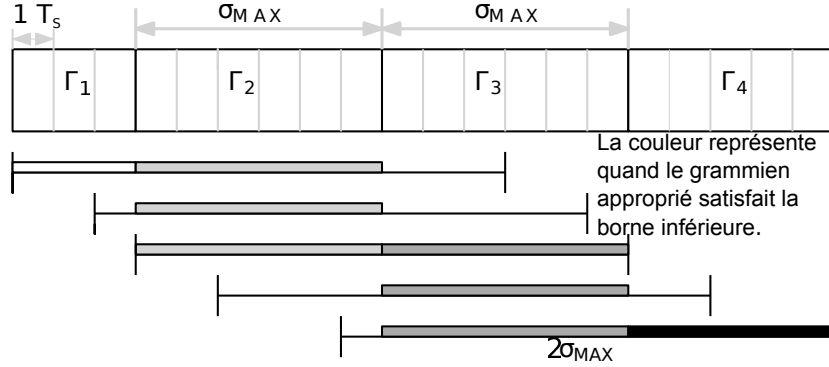
### 2.3 Structures affines en l'état avec injection de la sortie

Dans cette deuxième partie, les systèmes discrets affines en l'état avec une injection de sortie dans la matrice d'état vont maintenant être considérés. Ces systèmes sont de la forme définie au début du chapitre 2 par les équations (1.25). L'objectif ici est de toujours obtenir un certain degré d'observabilité, qui se traduit en borne minimale  $\alpha_1 > 0$  pour la plus petite valeur propre du grammien  $\Gamma$  sur une fenêtre de temps  $\gamma$  (voir équation (1.29)).

L'idée est de calculer le grammien sur une fenêtre qui augmente dans le temps, ce qui va permettre de construire un élément de la séquence d'entrée à chaque pas de temps, avec le but d'augmenter la borne inférieure de  $\Gamma$ , jusqu'à atteindre la valeur  $\alpha_1$ . Pour que ce soit faisable, il faut supposer qu'il existe une séquence d'entrées  $U_k$  sur une fenêtre de temps finie, maximale et de longueur  $\sigma_{MAX}$  qui satisfait la condition (1.31).<sup>1</sup> Dans ce cas, la longueur finale  $\sigma$  de la fenêtre du grammien, devrait être inférieure ou égale à  $\sigma_{MAX}$ .

Finalement, en considérant les grammiens résultant d'une fenêtre glissante de longueur  $2\sigma_{MAX}$ , la condition (1.31) va être satisfaite : cela s'explique par le fait que si pour une sous-fenêtre la condition d'un sous-grammien est toujours remplie alors elle le sera aussi toujours pour la fenêtre de longueur  $2\sigma_{MAX}$ . La figure 2.5 détaille comment la condition sur le grammien est remplie au fur et à mesure que la fenêtre se déplace. Les sous-grammiens sont nommés  $\Gamma_i$  et les barres avec différents gris représentent les périodes où la condition est remplie. On peut observer que la fenêtre de longueur  $2\sigma_{MAX}$  inclut toujours au moins un sous-grammien complet.

1. Si cette condition n'est satisfaite, alors aucune entrée persistante ne pourra être trouvée (pour l'algorithme d'optimisation qui sera développé plus loin l'existence d'une entrée persistante sera requise, dans le sens des contraintes considérées, et devra aussi appartenir à l'ensemble des entrées admissibles)

FIGURE 2.5 – Réalisation de la condition du grammien sur une fenêtre de  $2\sigma_{MAX}$  de longueur.

Mathématiquement, la construction se base sur la propriété suivante [112] :

**Propriété 2.1.** *Pour deux matrices symétriques et définies semi-positives  $A$  et  $B$ , si  $\lambda_A$  est la plus petite valeur propre de  $A$ ,  $\lambda_B$  la plus petite valeur propre de  $B$  et  $\lambda_{AB}$  la plus petite valeur propre de  $(A + B)$  alors :*

$$\max(\lambda_A, \lambda_B) \leq \lambda_{AB}, \quad (2.13)$$

De ce fait, la borne inférieure des valeurs propres du grammien avec une fenêtre de longueur  $2\sigma_{MAX}$  va être toujours satisfaite pour n'importe quel grammien avec une longueur maximale  $\sigma_{MAX}$ .

### 2.3.1 Algorithme numérique

Formellement, l'entrée est construite pas à pas afin de maximiser les valeurs propres du grammien qui sont commandables. Cela est fait en minimisant un critère avec les termes de la forme  $-q_2(\lambda_i - \lambda_{0i})$ , où  $\lambda_i$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  valeur propre, et  $\lambda_{0i}$  celle obtenue en répétant la même entrée qu'au pas antérieur. Il est facile de voir que si une valeur propre ne peut pas être commandée, le terme correspondant dans le critère est zéro, alors que si elle peut être commandée, il sera possible de maximiser cette valeur propre.

Afin d'améliorer la performance de l'algorithme, l'augmentation des valeurs propres inférieures à  $\alpha_1$  est pondérée en relation avec celles qui sont déjà supérieures à  $\alpha_1$  en rajoutant une pondération de la forme  $q_3^{(\alpha_1 - \lambda_{0i})}$ .

D'autre part, pour tenir compte d'une possible valeur de référence  $u_{ref}$  de l'entrée - correspondant au point normal d'opération du système, et pour aider à discriminer entre plusieurs solutions possibles, un terme  $q_1(u_{ref} - u_k)^2$  peut être inclus dans le critère.

En pratique,  $q_1$  doit être choisi bien plus petit que  $q_2$  et  $q_3$  pour garder l'optimisation focalisée sur les valeurs propres.

Finalement, l'algorithme d'optimisation peut aussi tenir compte des limites sur l'entrée, comme :

- une valeur absolue maximale  $Umax$  et minimale  $Umin$  pour chaque élément de la séquence d'entrée ;
- une différence absolue maximale  $\delta Umax$  entre deux entrées consécutives.

En résumé, le critère à minimiser peut être exprimé comme :

$$\min_{u_k} [q_1(u_{ref} - u_k)^2 + \sum_{i=1}^n -q_2(\lambda_i - \lambda_{0i})q_3^{(\alpha_1 - \lambda_{0i})}]$$

avec

$$\begin{aligned} Umin &< u_k < Umax, \\ \frac{|u_{k-1} - u_k|}{T_S} &< \delta Umax, \\ u_{-1} &= u_{ref}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

où,  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  sont des poids positifs à choisir particulièrement pour améliorer le conditionnement numérique (et avec  $q_1$  bien plus petit que  $q_2$  et  $q_3$ ),  $\lambda_i$  (*resp.*  $\lambda_{0i}$ ) sont les valeurs propres du grammien calculées avec l'entrée  $u_k$  à optimiser au pas  $k$  (*resp.* avec  $u_k = u_{k-1}$ ), et  $u_{ref}$  est l'entrée de référence.

Après chaque pas, les valeurs propres du grammien doivent être recalculées : si elles sont égales ou supérieures à  $\alpha_1$ , alors la fenêtre est réinitialisée à l'ordre du système (taille minimale de la fenêtre), autrement la fenêtre est augmentée d'un pas. Si l'hypothèse qu'il existe une longueur de fenêtre maximale égale à  $\sigma_{MAX}$  est satisfaite, alors la longueur de la fenêtre ne diverge pas.

### 2.3.2 Exemple académique

Comme pour le paragraphe précédant, on utilise un exemple lié à la détection de fuites et l'estimation du frottement sur un pipeline qui sera détaillé dans le chapitre 6. Les équations différentielles correspondant au vecteur d'état  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$  sont :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_2 - ax_3\sqrt{u} + ax_4 \\ \dot{x}_2 &= -bx_1 - cx_2|x_2|x_5 - bu \\ \dot{x}_3 &= 0 \\ \dot{x}_4 &= 0 \\ \dot{x}_5 &= 0 \\ y &= x_2 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Le modèle peut être ré-écrit sous la forme de représentation d'état, comme suit :

$$\dot{\bar{x}} = A(u, y)\bar{x} + Bu, \quad y = C\bar{x} \quad (2.16)$$

avec les matrices :

$$A(u, y) = \begin{bmatrix} 0 & -a & -a\sqrt{u} & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & -cy|y| \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

À partir de cette représentation, clairement toutes les entrées ne sont pas des entrées persistantes (et particulièrement celles qui sont constantes).

Les matrices (2.17) et (2.18) sont discrétisées en utilisant l'équation (2.12) avec  $y(t)$  et  $u(t)$  considérés comme constantes entre les instants  $k$  et  $k + 1$  en choisissant un temps d'échantillonnage approprié.

Comme mentionné antérieurement, l'algorithme doit respecter les contraintes physiques de l'entrée du système. La première contrainte est la définition de borne inférieur et supérieur :

$$u_k \subset [U_{min}, U_{max}] \text{ avec } k = [0, 2, \dots, N - 1]$$

La deuxième contrainte est sur la valeur absolue de la dérivée de l'entrée, ceci implique que la différence absolue entre deux éléments consécutifs de l'entrée  $u_k$ , divisée par  $T_S$ , doit être inférieure  $|\dot{U}_{max}|$ , soit :

$$|u_{i+1} - u_i| < |\dot{U}_{max}|T_S \text{ avec } i = [0, 2, \dots, N - 2]$$

La dernière contrainte est la fréquence maximale de l'entrée : comme l'entrée est calculée en ligne, à chaque pas de temps elle doit être actualisée, donc la fréquence doit être compatible avec le temps d'échantillonnage  $T_S$  du système. En fait, c'est une contrainte de plus pour l'algorithme, qui pour l'instant ne peut pas être évitée, et force l'utilisation de l'algorithme dans les systèmes où la fréquence d'entrée est plus grande que l'inverse de l'intervalle d'échantillonnage. Les systèmes considérés remplissent cette condition.

Paramètre	valeur	Paramètre	valeur
$a$	$4.896 \cdot 10^4$	Bruit	0.1%
$b$	42.048	$U_{min}$	2.8
$c$	$3.924 \cdot 10^{-4}$	$U_{max}$	3.2
$\gamma$	0.999	$\dot{U}_{max}$	1
$R$	1	$T_s$	0.5

TABLE 2.3 – Valeurs des paramètres du système, de l'observateur et de l'entrée

### 2.3.3 Simulations

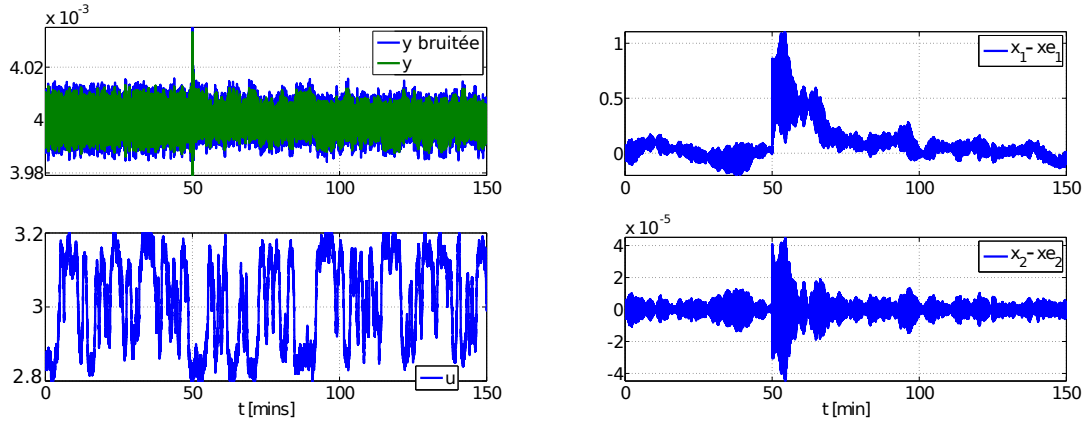


FIGURE 2.6 – Sortie bruitée, entrée persistante et erreur d'estimation

Le problème d'optimisation est résolu en utilisant la fonction *fmincon* de Matlab2012b<sup>®</sup>, et toutes les simulations ont été effectuées avec le même logiciel. Les valeurs choisies pour les paramètres de réglage de l'algorithme, et l'observateur (1.32), sont résumées dans la table 2.4. Ces valeurs ont été obtenues à partir de plusieurs essais, en accord avec leur signification discutée dans les paragraphes précédents.

Les figures 2.7 et 2.6 présentent les résultats de la simulation du système, l'observateur et l'algorithme. Dans ces figures, on peut voir qu'à  $t = 50 \text{ mins}$  un changement est simulé sur les variables  $x_3$ ,  $x_4$  et  $x_5$  (de sorte que la sortie reste inchangée et les défauts ne soient pas détectable par une simple inspection visuelle).

D'après les figures, l'observateur converge exponentiellement vers les états réels du système à partir de la sortie bruitée (0.1% de bruit blanc gaussien).

La figure 2.6 montre la sortie avec et sans bruit et le signal d'entrée optimal qui garantit l'observabilité du système. Les différentes tailles des fenêtres des grammiens sont montrées dans la figure 2.7.

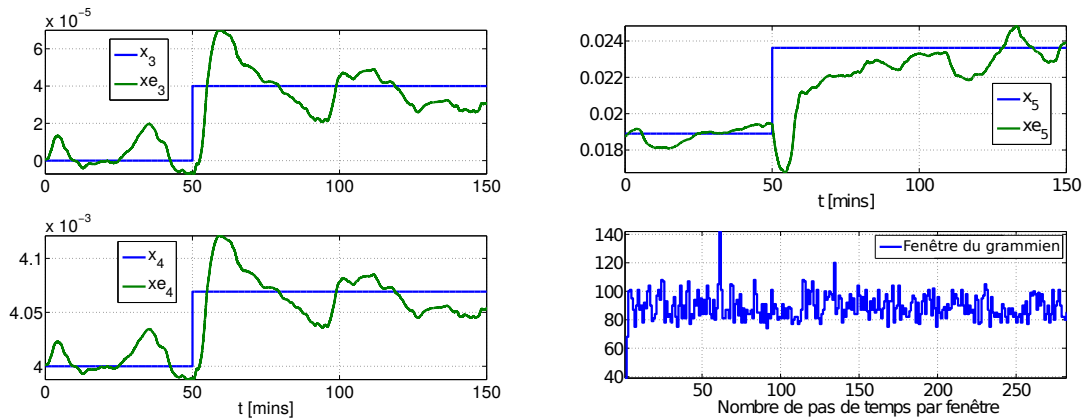


FIGURE 2.7 – États estimés et taille des fenêtres des grammien

Paramètres	Valeurs	Description
$\alpha$	$10^{-3}$	Borne inférieure du grammien
$q_1$	$10^{-3}$	Poids sur l'énergie d'entrée
$q_2$	$10^8$	Poids sur la différence des valeurs propres
$q_3$	$10^3$	Poids sur la base de l'exponentielle des valeurs propres
$R$	1	Matrice des pondérations symétrique définie positive
$\gamma$	0.999	Modificateur de la vitesse de convergence

TABLE 2.4 – Paramètres de réglage de l'algorithme et de l'observateur

Finalement, les simulations montrent que l'entrée générée par l'optimisation est persistante et l'observateur arrive bien à estimer les états du système, mais les performances par rapport au bruit sont assez limitées. Le problème sera plus particulièrement abordé au chapitre suivant

## 2.4 Conclusions

Dans ce chapitre compte tenu du fait que la convergence d'observateurs pour systèmes de type affine en l'état dépend de l'entrée, deux algorithmes ont été proposés pour construire des entrées persistantes basés sur le grammien d'observabilité.

Le premier est un algorithme qui s'applique aux systèmes affines en l'état et qui peut se résoudre hors-ligne, alors que le deuxième accepte des systèmes affines en l'état avec injection de la sortie mais doit être résolu en ligne.

Pour les deux algorithmes, des exemples académiques et des simulations avec résultats illustratifs ont été proposés. Plus en détails sur l'application à la détection de fuite seront donnés au chapitre 6.



# Commande de l'observabilité en se basant sur l'observateur

---

## Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>33</b>
<b>3.2</b>	<b>Amélioration d'observabilité par commande de l'observateur seulement</b>	<b>34</b>
3.2.1	Principe général	34
3.2.2	Exemple illustratif	37
<b>3.3</b>	<b>Amélioration de l'observabilité à partir de l'équation de l'observateur et du grammien</b>	<b>40</b>
3.3.1	Principe et mise en forme du problème	41
3.3.2	Algorithme numérique	44
3.3.3	Exemple illustratif	46
<b>3.4</b>	<b>Conclusions</b>	<b>49</b>

---

## 3.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre précédent une façon de trouver de bonnes entrées pour l'observation à base de grammien d'observabilité. Une alternative peut être de chercher des entrées directement par optimisation de gains d'observateur, quand ces gains sont disponibles explicitement. C'est le cas pour tout système qui entre dans la catégorie "affine en l'état avec perturbation additive triangulaire" rappelée au chapitre 1 par l'équation (1.20) par exemple. Dans ce chapitre, on présente donc cette idée nouvelle comme un problème de *commande optimale pour l'équation de gain d'observateur*.

Dans un premier temps, l'idée est formulée pour les systèmes affines en l'état à perturbation triangulaire, avec contraintes permettant de garantir la convergence de l'observateur associé.

Dans un deuxième temps, on souligne comment il est possible d'aller plus loin dans le cas de systèmes simplement affines en l'état comme ceux considérés au paragraphe 2.2 du chapitre précédent, en combinant la nouvelle idée de ce chapitre avec l'optimalité déjà connue de l'observateur de Kalman vis-à-vis du bruit pour ces systèmes.



Finalement, mentionnons que tous les algorithmes développés sont testés numériquement sur des exemples, dont un avec application à la détection de fuites qui sera présenté plus en détails au chapitre 6.

## 3.2 Amélioration d'observabilité par commande de l'équation de l'observateur seulement

### 3.2.1 Principe général

Dans ce paragraphe on commence par une classe de systèmes assez générale, qui s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(u(t), v(t))x(t) + f(x(t), u(t), v(t)) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

où  $x \in \mathbb{R}^N$  décrit le vecteur des états,  $u \in \mathbb{R}^m$  une entrée de commande qui peut être utilisée pour la conception de l'observateur,  $y \in \mathbb{R}$  la variable mesurée, et  $v \in \mathbb{R}^q$  quelques signaux qui peuvent être injectés dans l'observateur (incluant  $t$  ou  $y(t)$  par exemple). Supposons que  $\|A(u, v)\| \leq a(u)$  pour tout  $u, v$ , et  $a(u) \in \mathbb{C}^\infty$ . Supposons aussi que  $f$  est globalement Lipschitz en  $x$ , uniformément en  $u, v$ , avec une constante  $\gamma$ .

Le premier point à souligner est que ce système peut a priori admettre des entrées pour les quelles l'observabilité est perdue (non-uniformément observable [18]). Rappelons également comme vu au chapitre 1, que sous des conditions d'entrée, un observateur s'écrit sous la forme suivante (comme dans [94, 98, 35]) :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A(u(t), v(t))\hat{x}(t) \\ &\quad + f(\hat{x}(t), u(t), v(t)) - \Lambda(\lambda)P(t)C^TW^{-1}(C\hat{x}(t) - y(t)); \\ \dot{P}(t) &= \lambda[\sigma P(t) + P(t)A^T(u(t), v(t)) + A(u(t), v(t))P(t) \\ &\quad - P(t)C^TW^{-1}CP(t)]; \\ P(0) &\succ 0;\end{aligned}\tag{3.2}$$

pour des paramètres de réglage positifs  $\sigma, \lambda$  et une matrice correspondante  $\Lambda$  appropriée, et  $\succ$  signifie défini positif.

Dans le cas où  $f(x, u, v) = f(u, v)$  par exemple,  $\lambda$  peut être égal à 1,  $\Lambda$  à la matrice identité  $I$ , et on obtient l'observateur de Kalman (avec facteur d'oubli) [19, 95].

Si  $A, f$  satisfont la structure dite de "Grand Gain" [42], alors (3.2) devient un observateur pour (3.1) si  $\lambda$  est suffisamment grand - et  $\Lambda$  une matrice diagonale avec des éléments diagonaux augmentant en puissances de  $\lambda$  [12]. Le système (3.2) peut aussi être un observateur si  $\lambda = 1$ ,  $\Lambda = I$  et  $\sigma$  est choisi assez grand [35].

Dans tous ces cas, en se référant aux outils d'analyse de stabilité de “Lyapunov” [59] la convergence de l'observateur est associée à une fonction de Lyapunov définie à partir de  $P^{-1}$ , et l'existence de celle-ci est reliée à une excitation appropriée de l'entrée.

En regardant (3.2) comme une equation d'états menée par l'entrée  $u$ , le problème d'observation se transforme en un problème de commande, dans le sens que  $u$  doit être conçue pour que  $P^{-1}$  reste définie.

Si une telle entrée existe (correspondant à une certaine observabilité du système), elle peut être trouvée par une approche de commande optimale, en minimisant  $P$ . Ceci maximisera  $P^{-1}$ , et peut être fait en tenant compte de l'énergie de l'entrée en même temps, typiquement en utilisant une fonction de coût quadratique. On peut additionner d'autres contraintes sur  $u$ , ainsi que des contraintes spécifiques sur  $P$  si nécessaire (par exemple pour garantir la stabilité de l'observateur).

De cette façon, pour trouver cette entrée, un problème non-linéaire de commande optimale doit être résolu et on peut utiliser les outils d'optimisation déjà disponibles à cet effet.

Pour résumer, on considère que (3.2) est un observateur pour (3.1) si la solution de  $\dot{P}$  admet des bornes uniformes supérieures et inférieures et peut être utilisée pour caractériser la stabilité de l'observateur dans une fonction quadratique de Lyapunov, et on va désigner par  $\mathcal{P}$  l'ensemble des matrices appropriées qui seront définies positives.

Ensuite, nous pouvons affirmer ce qui suit :

**Proposition 3.1.** *On considère un système de la forme (3.1), et on suppose que pour un  $\lambda$  et un  $\sigma$  donnés il existe un certain  $u$  admissible tel que (3.2) est un observateur pour ce système (avec un ensemble associé  $\mathcal{P}$ ), alors une telle entrée appropriée peut se trouver sur un intervalle  $[0, T]$ , en résolvant un problème de la forme :*

$$\min_u \int_0^T [\rho \|u(s)\|^2 + \|P(s)\|^2] ds \quad (3.3)$$

*sujet aux équations (3.2),  $P \in \mathcal{P}$ , et  $u \in \mathcal{U}$*

avec  $\mathcal{U}$  l'ensemble des entrées admissibles, et  $\rho > 0$ .

Dans le cas où  $f(x, u, v) = f(u, v)$ , les contraintes sur  $P$  se réduisent à une borne supérieure, puisque dans ce cas  $\lambda$  peut valoir 1, et on sait que la borne inférieure sur  $P$  est garantie pour un  $\sigma$  assez grand quand  $a(u)$  est borné (voir par exemple [19]).

Par conséquent, l'analyses de stabilité habituelle pour l'observateur correspondant reste valable (comme dans [53] par exemple)

Dans le cas où  $f$  dépend de  $x$  d'une façon  $\lambda$ -Lipschitz, avec  $A, f$  satisfaisant la “structure Grand Gain”, on doit considérer une contrainte additionnelle sur  $P$  pour garantir la stabilité de l'observateur, qui peut par exemple être de la forme :

$$\gamma^2 P^2 - \lambda \sigma P + I < 0, \quad (3.4)$$

avec  $\lambda\sigma > 2\gamma$  pour la faisabilité du problème, et  $P(0)$  choisi pour satisfaire (3.4). Pour ce cas, la borne inférieure sur  $P$  est encore garantie par un choix approprié de  $\sigma$ , tandis que la borne supérieure est garantie par (3.4), et on peut alors considérer  $V(e) = e^T \Lambda^{-1} P^{-1} \Lambda^{-1} e$  comme une fonction candidate de Lyapunov pour la dynamique de l'erreur dans  $e := \hat{x} - x$ . À partir de calculs directs, il résulte en effet que :

$$\dot{V} \leq -\lambda\sigma V + 2e^T \Lambda^{-1} P^{-1} \Lambda^{-1} \Delta f$$

où  $\Delta f = f(\hat{x}, u, v) - f(x, u, v)$ .

De cela, nous pouvons obtenir :

$$\dot{V} \leq -\lambda\sigma V + e^T \Lambda^{-1} P^{-1} P^{-1} \Lambda^{-1} e + \Delta f^T \Lambda^{-2} \Delta f$$

et en utilisant l'analyse de l'observateur grand gain [Gauthier et al. (1992)], on obtient :

$$\dot{V} \leq -\lambda\sigma V + e^T \Lambda^{-1} P^{-1} P^{-1} \Lambda^{-1} e + \gamma^2 \|\Lambda^{-1} e\|^2.$$

Finalement, (3.4) implique que :

$$-\lambda\sigma P^{-1} + P^{-1} P^{-1} + \gamma^2 I < 0$$

qui donne la convergence vers zéro de l'erreur d'estimation  $e$  avec des arguments standards de Lyapunov [59].

Notons que pour implémenter dans la pratique la proposition 3.1, l'entrée désirée peut être approchée par des fonctions constantes par morceaux, actualisées avec une période (disons  $T_u$ ), à choisir à partir d'un compromis entre la précision de l'approximation et les contraintes fréquentielles sur les variations de cette entrée.

Cela signifie qu'une séquence d'entrée appropriée peut se construire en résolvant, pour tout  $k \geq 0$  :

$$\min_{u_k} \int_{kT_u}^{(k+1)T_u} [\rho \|u\|^2 + \|P(s)\|^2] ds \quad (3.5)$$

sous (3.2),  $P \in \mathcal{P}$ , et  $u \in \mathcal{U}$

On peut considérer des limites dans les amplitudes de l'entrée, auquel cas l'ensemble admissible des entrées  $\mathcal{U}$  peut se définir par une contrainte de la forme  $\|u_i\| \leq U_{imax}$  pour toute entrée  $u_i$  du vecteur  $u$ .

Par rapport aux contraintes sur  $P$ , elles vont dépendre de la classe spécifique du système considéré comme discuté précédemment.

De la même manière, le choix de  $\lambda$  dépend aussi de la forme du système, tandis que  $\sigma$  doit être choisi assez grand par rapport à la borne supérieure de  $a(u)$ .

Le paramètre  $\rho$  dans le critère est un coefficient de poids classique, qui en pratique est choisi assez petit pour prioriser la minimisation de  $P$ .

Regardons maintenant la possible présence d'une certaine variable  $v(t)$  dans les dynamiques de  $P$  : l'implémentation de la procédure d'optimisation ci-dessus exige qu'au temps  $kT_u$ ,  $v(s)$  soit connue sur  $s \in [kT_u, (k+1)T_u]$ , pour tout  $k \geq 0$ . Si ce n'est pas le cas, il peut être prédit par un simple bloqueur d'ordre 0 ou 1.

Notons enfin qu'en pratique, l'équation du gain de l'observateur (3.2) peut être améliorée en ajoutant des matrices  $Q$  et  $R$  définies semi-positive et positive respectivement, par exemple choisies selon le niveau de bruit dans la sortie et les états respectivement. Particulièrement, ceci a plus de sens dans le cas des équations du filtre de Kalman, où le système (3.1) se réduit à un système affine en l'état, et pour ce cas, l'entrée proposée revient à améliorer les propriétés de filtrage dans l'observateur. Cette approche sera présentée en détails dans le paragraphe 3.3.

### 3.2.2 Exemple illustratif

Pour illustrer l'approche discutée ci-dessus, considérons de nouveau un exemple d'application à la détection de fuites, qui sera repris dans la partie 2 de ce manuscrit. Pour cette première partie on va le considérer comme un exemple académique.

Ce système est composé de quatre états,  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ , une sortie,  $y = x_1$ , une entrée et  $u$ , les dynamiques des états sont décrites par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - u) - by|y|x_3 \\ \dot{x}_2 &= c(v - y - \sqrt{u}x_4) \\ \dot{x}_3 &= 0 \\ \dot{x}_4 &= 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

avec  $v = f(u, x_2) = -\frac{1}{2} \left( \theta - \sqrt{\theta^2 - 4d(e + x_2 - u)} \right)$  et  $v$  une variable qui peut être, ou ne pas être, mesurée, selon deux cas que l'on va considérer.

- Cas (i) : si  $v$  est une mesure, alors on obtient un système sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1(u, y) + B_1(u, y, v) \\ y &= C_1 x \end{aligned} \tag{3.7}$$

avec :

$$A_1(u, y) = \begin{bmatrix} 0 & a & -by|y| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c\sqrt{u} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1(u, y, v) = \begin{bmatrix} -au \\ c(v - y) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ et } C_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \tag{3.8}$$

pour ce type de système un observateur classique de type Kalman peut s'obtenir à partir des équations (3.2), avec par exemple  $\lambda = 1$  et  $\Lambda = I$ .

- Cas (ii) : si  $v$  n'est pas mesurée, alors le modèle devient :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_2(u, y) + B_2(u, y, x) \\ y &= C_2x \end{aligned} \quad (3.9)$$

avec :

$$A_2 = A_1, \quad C_2 = C_1 \quad \text{et} \quad B_2(u, y, x) = \begin{bmatrix} -au \\ c(f(u, x_2) - y) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Dans ce cas, l'observateur a besoin d'une structure type "grand gain", soit avec  $\lambda$  assez grand, comme dans [13], ou sinon avec  $\lambda = 1$  et  $\sigma$  assez grand (comme dans [35]).

Dans les deux cas, on constate que l'observabilité dépend de l'entrée, et donc l'approche présentée ci-avant peut être utilisée.

On présente donc ci-après plusieurs simulations des deux systèmes, où leurs entrées sont solutions du problème 3.5.

La table 3.1 montre les valeurs numériques des constantes du système pour les deux cas.

Lettres	Valeurs
$a$	$3.9240 \cdot 10^{-4}$
$b$	$2.2043 \cdot 10^3$
$c$	$4.8960 \cdot 10^4$
$d$	$2.7883 \cdot 10^{-6}$
$e$	$-2.73 \cdot 10^1$
$\theta$	$1.91 \cdot 10^{-4}$

TABLE 3.1 – Paramètres constants du système

Dans chaque cas le système part de la condition d'équilibre ( $x_1 = 4.3 \cdot 10^{-3}$ ) et à  $t = 500s$  les états  $x_3$  et  $x_4$  changent brusquement à cause d'un défaut qui se présente dans le système, on constate alors bien, que l'observateur arrive à estimer ces nouvelles valeurs. Pour les deux observateurs  $\sigma = 0.01$ ,  $R = 1 \cdot 10^{-9}$ ,  $Q = 1 \cdot 10^{-13}I$ , tandis que  $\lambda = 1$  pour le cas (i) et  $\lambda = 1.05$  pour le cas (ii).

Premièrement, les figure 3.1 et 3.2 montrent les erreurs des estimations obtenues pour les états, on peut voir que la convergence est bien atteinte. L'entrée correspondante obtenue par l'approche d'optimisation peut se voir dans la figure 3.3 (les contraintes sont :  $U_{min} = 3.1$  et  $U_{max} = 3.7$ ), et dans la même figure, on montre la valeur propre maximale de  $P$ . On constate qu'elle est bornée tout le long de la simulation.

De façon similaire, pour le cas (ii), les figure 3.4 et 3.5 montrent l'erreur d'estimation des

états et la figure 3.6 illustre l'entrée optimale et les valeurs propres maximales de la matrice  $P$  respectivement.

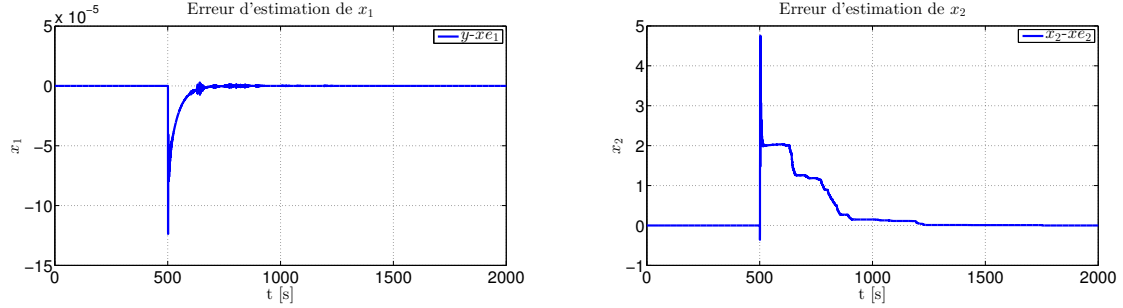


FIGURE 3.1 – Estimation de  $x_1$  et  $x_2$  pour le cas (i).

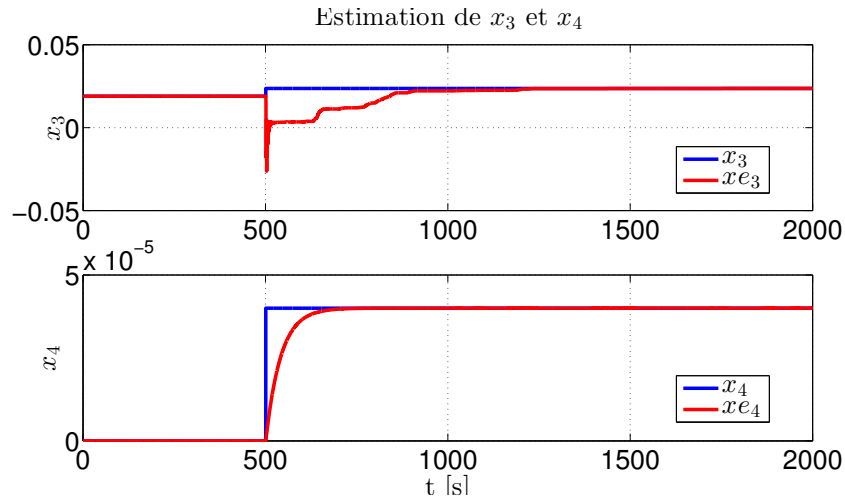


FIGURE 3.2 – Erreur d'estimation de  $x_3$  et  $x_4$  pour le cas (i).

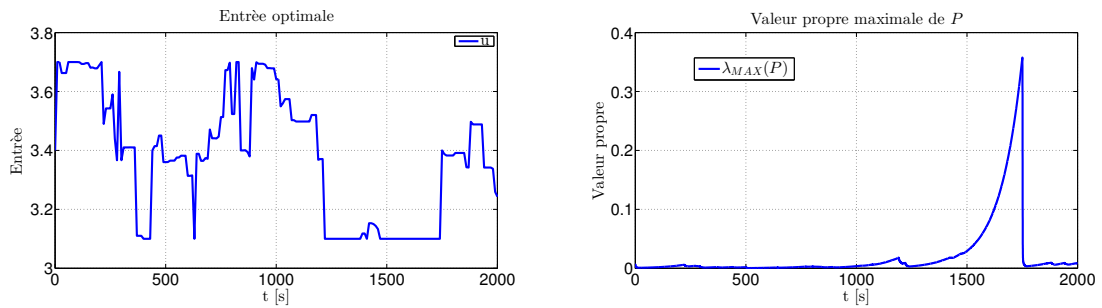
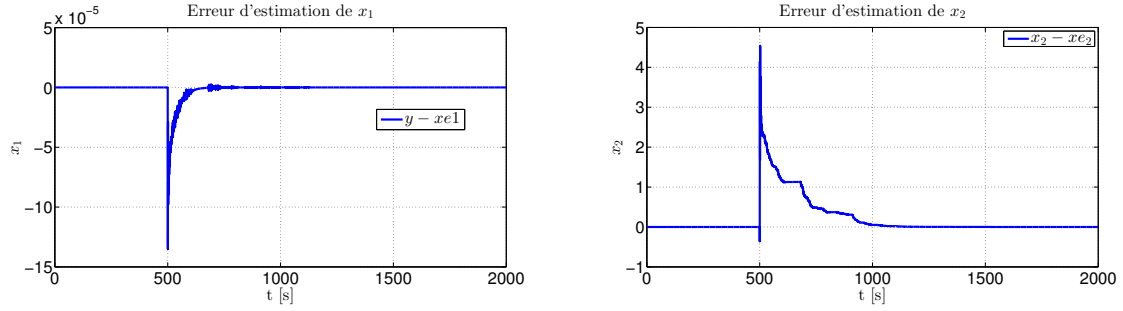
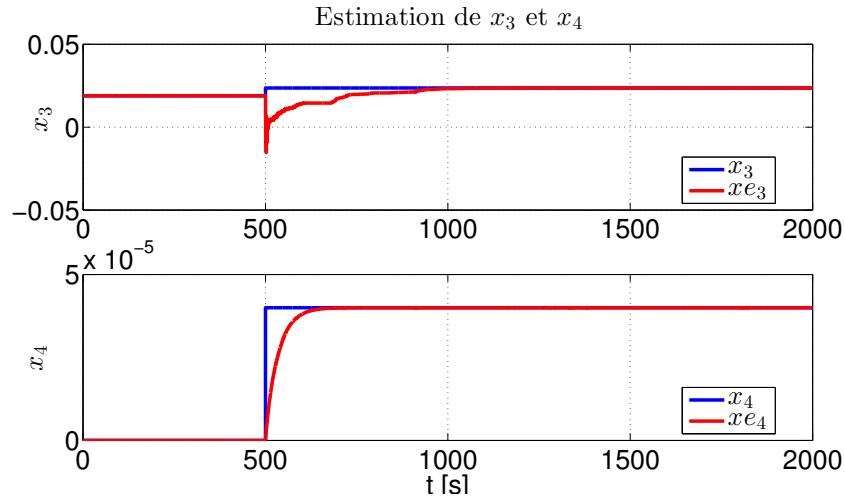
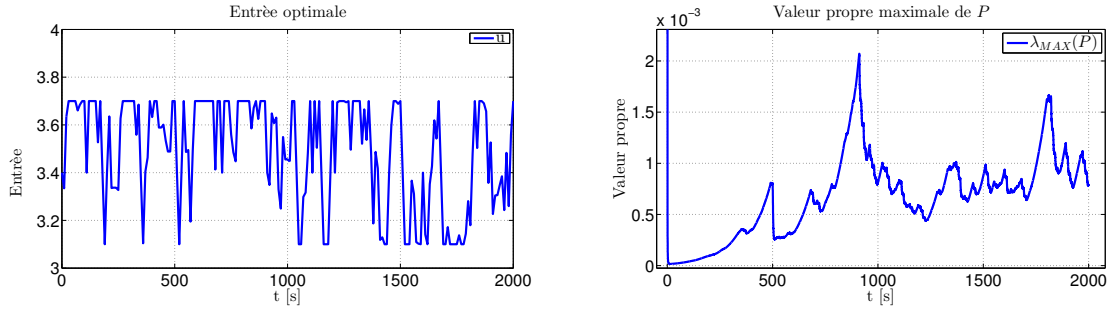


FIGURE 3.3 – Entrée optimale et valeurs propres maximales de  $P$  pour le cas (i).

FIGURE 3.4 – Erreur d'estimation de  $x_1$  et  $x_2$  pour le cas (ii).FIGURE 3.5 – Erreur d'estimation de  $x_3$  et  $x_4$  pour le cas (ii).FIGURE 3.6 – Entrée optimale et valeurs propres maximales de  $P$  pour le cas (ii).

### 3.3 Amélioration de l'observabilité à partir de l'équation de l'observateur et du grammien

Dans cette section on montre que dans le cas de système simplement affine en l'état, en considérant l'approche d'optimisation du grammien avec celle de commande du gain de l'observateur, on peut trouver une entrée persistante, d'énergie minimale, qui non seulement garantisse la convergence de l'erreur d'estimation mais aussi qui améliore les performances de

l'observateur par rapport au bruit du système présent dans la sortie et dans les états.

On se base ici sur la structure de l'observateur de Kalman en temps discret pour avoir les propriétés de robustesse par rapport au bruit, et on utilise le grammien d'observabilité pour garantir la stabilité de l'observateur.

Plusieurs techniques de commande optimale non linéaire seront utilisées pour construire un algorithme capable de générer l'entrée persistante optimale recherchée.

Finalement l'algorithme sera appliqué sur un exemple simple en temps discret et des résultats de simulations illustreront les performances correspondantes.

### 3.3.1 Principe et mise en forme du problème

Considérons les systèmes discrets de la forme suivante :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A(u_k)x_k + B(u_k) + w_k \\ y_k &= C(u_k)x_k + v_k \end{aligned} \tag{3.11}$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  indique le vecteur d'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  le vecteur de certaines variables d'entrée qui peuvent être utilisées dans la conception de l'observateur et  $y \in \mathbb{R}$  la variable de sortie mesurée. Les bruits  $w \in \mathbb{R}^n$  et  $v \in \mathbb{R}$  sont blancs, de moyenne zero, non corrélés, et ont des matrices de covariance connues  $Q$  et  $R$  respectivement.

Pour ce type de systèmes, une séquence d'entrée donnée génère un système linéaire variant dans le temps où l'observabilité peut être étudiée (voir exemple [94]) :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k + w_k \\ y_k &= C_k x_k + v_k \end{aligned} \tag{3.12}$$

où  $A_k$ ,  $B_k$  et  $C_k$  sont supposés bornés (c'est le cas par exemple si  $u_k$  l'est et les matrices  $A, B, C$  sont continues par rapport à leurs arguments).

Comme dans toutes les discussions précédentes ce système peut a priori admettre des entrées où l'observabilité n'est pas garantie et les bonnes entrées (persistantes) peuvent être considérées à partir du grammien noté  $\Gamma$  sur une fenêtre  $[k-\sigma, k]$  (voir équation (1.29)). Ce sont notamment celles pour lesquelles le grammien est borné.

Si l'équation du grammien est stabilisable par rapport à  $u$ , alors il existe un ensemble non vide  $\mathcal{U}$  d'entrées qui garantissent la condition  $\lambda_{\min}(\Gamma(k, \sigma)) \geq \alpha_1$ . Le problème d'observabilité se transforme en un problème de commande, et c'est en ce sens que  $u$  doit être conçue de telle sorte que  $\Gamma(k, \sigma)$  reste borné.

Si le système (3.12) est excité par une entrée persistante  $u$  ( $u \in \mathcal{U}$ ), alors le filtre de Kalman



pour ce système peut s'écrire sous la forme suivante ([58]) :

**Théorème 3.1** (Filtre de Kalman pour les systèmes affines en l'état).

Pour toute séquence d'entrée bornée régulièrement persistante  $U_k$  générant un système (3.12) à partir de (3.11), le système suivant :

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &= A_k \hat{x}_k + B_k + A_k K_k (y_k - C \hat{x}_k) \\ K_k &= P_k C_k^T (C_k P_k C_k^T + R)^{-1} \\ P_{k+1} &= A_k (P_k - K_k C_k P_k) A_k^T + Q \\ P_0 &= P_0^T \succ 0, R = R^T \succ 0, Q = Q^T \succ 0\end{aligned}\tag{3.13}$$

est le filtre optimal pour un système (3.11).

*Remarque :* Dans le filtre de Kalman classique la matrice  $Q$  est semi-définie positive, et dans ce cas la paire  $(A, Q^{1/2})$  doit être commandable pour tout  $k$ . Dans ce chapitre, on suppose que  $Q$  est défini positif ce qui garantit la commandabilité de la paire  $(A, Q)$  pour tout  $k$ .

L'ensemble des équations (3.13) est la solution du problème d'optimisation qui minimise la trace de la covariance de la matrice d'erreur d'estimation  $P_k$  [95, 91] :

$$\min_{\hat{x}} E\{(x_k - \hat{x}_k)^T (x_k - \hat{x}_k)\}.\tag{3.14}$$

La solution optimale de ce problème (équations (3.13)) est, en fait, une fonction de l'entrée  $u$ . Cette dernière équation motive de trouver une entrée optimale persistante  $\bar{u} \in \bar{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}$  qui minimise l'équation (3.14), où  $\bar{\mathcal{U}}$  est l'ensemble des entrées optimales et persistantes. Ceci mène à un nouveau problème d'optimisation :

$$\min_{\bar{u}} \min_{\hat{x}_k} E\{(x_k - \hat{x}_k)^T (x_k - \hat{x}_k)\}\tag{3.15}$$

la solution de ce nouveau problème donne une entrée optimale pour le filtre optimal par rapport aux bruits  $w$  et  $v$ .

*Note :* Une première approche pour construire une entrée optimale qui minimise certains états de la matrice de Riccati a été présentée dans [114, 113], mais ces résultats sont très locaux car sont basés sur le filtre de Kalman étendu, sans aucune garantie de convergence, alors que dans ce travail on propose une structure qui nous permet de garantir l'observabilité et la convergence de manière globale.

Pour pouvoir trouver une solution au problème (3.15), on considère un problème de commande optimale, en temps discret, sur une fenêtre de temps glissante avec une contrainte d'inégalité scalaire comme suit (voir [100, 99] pour plus de détails) :

$$\min_{u_0 \dots u_{N-1}} q \operatorname{Tr}(P_{k+N}) + \sum_{l=k}^{k+N-1} \left\{ \operatorname{Tr}(P_l) + \frac{r}{2} \|u_l\|^2 \right\}\tag{3.16}$$

sous les dynamiques suivantes :

$$P_{l+1} = A_l P_l A_l^T - A_l P_l C_l^T (C_l P_l C_l^T + R)^{-1} C_l P_l A_l^T + Q \quad (3.17)$$

$$W_l = A_l^T W_{l+1} A_l + C_l^T C_l \quad (3.18)$$

avec la condition sur le grammien et les conditions limites :

$$P_k = P_k^T \succ 0 \quad (3.19)$$

$$W_k = 0 \quad (3.20)$$

$$-\det(W_{k+N} - \alpha I_d) \leq 0, \quad \alpha > 0 \quad (3.21)$$

**Remarque 3.1.** *La largeur de la fenêtre d'optimisation  $N$  doit être suffisamment grande pour garantir la commandabilité de tous les états commandables de la matrice  $P_N$*

**Remarque 3.2.** *L'énergie du signal est minimisée pour trouver une entrée optimale bornée, et ainsi la solution de ce problème conduit à une entrée optimale persistante d'énergie minimale.*

**Remarque 3.3.** *Pour la première fenêtre l'initiation de l'algorithme se fait avec  $P_k = P_0$  et  $P_0 \succ 0$ , puis pour les autres on prend  $P_k = P_{k+1}^*$  avec l'indice  $*$  pour désigner la fenêtre précédente.*

En utilisant la technique développée dans [31], l'inégalité peut être incluse dans le Lagrangien augmenté :

$$L_c = q \operatorname{Tr}(P_{k+N}) + \sum_{l=k}^{k+N-1} \left\{ \operatorname{Tr}(P_l) + \frac{r}{2} \|u_l\|^2 \right\} + \frac{1}{2c} ((\max(0, p^i + cI(W_k)))^2 - (p^i)^2) \quad (3.22)$$

où  $p^i$  est le multiplicateur Lagrangien associé à la contrainte, à l'itération duale  $i$ , et  $c > 0$  est le coefficient d'augmentation du Lagrangien.

Deux résultats fondamentaux résultent de [31] et sont rappelés à continuation :

**Lemma 3.1.** *Si la paire  $(\{u_l\}_{l=0,N}, p^i)$ , nommée point de selle, est solution du problème min-max suivant :*

$$\min_{\{u_l\}_{l=0,N}} \max_{p^i} L_c = \max_{p^i} \min_{\{u_l\}_{l=0,N}} L_c \quad (3.23)$$

*alors  $\{u_l\}_{l=0,N}$  est une solution au problème (3.16)-(3.21)*

**Lemma 3.2.** *Quand le problème de commande optimale (3.16)-(3.21) n'est pas (fortement) convexe, on peut montrer qu'un point selle pour  $L_c$  existe toujours à condition de choisir  $c$  suffisamment grand.*

### 3.3.2 Algorithme numérique

Pour résoudre le problème (3.23), il faut résoudre le problème suivant :

$$\max_{p^i} \min_{\{u_l\}_{l=0,N}} L_c = \max_{p^i} w_c(p^i) \quad (3.24)$$

où  $w_c(p^i) = \min_{\{u_l\}_{l=0,N}} L_c$  est appelée fonction duale du problème.

Un algorithme (entre d'autres) pour trouver  $w_c$  est donné par :

1. Commencer avec  $(\{u_l^0\}_{l=k,k+N-1}, p^0)$ , pour  $i = 0$ .
2. A chaque itération  $i + 1$ , résoudre le problème :

$$\begin{aligned} \min_{u_l^{i+1}} & q \operatorname{Tr}(P_{k+N}) + \sum_{l=k}^{k+N-1} \left\{ \operatorname{Tr}(P_l) + \frac{r}{2} \|u_l^{i+1}\|^2 \right\} \\ & + \frac{1}{2c} ((\max(0, p^i + cI(W_k)))^2 - (p^i)^2) \end{aligned} \quad (3.25)$$

sujet aux les dynamiques (3.17)-(3.18) et aux conditions initiales (3.19)-(3.20).

Si  $\{u_l^{i+1}\}_{l=k,k+N}$  est une solution de (3.25), alors on a calculé  $w_c(p^i)$  (on a aussi calculé  $W_k^{i+1}$  à partir de l'équation (3.18)).

3. Actualiser  $p$  avec la méthode du gradient :

$$p^{i+1} = (1 - \frac{\rho}{c})p^i + \frac{\rho}{c} \max(0, p^i + cI(W_k^{i+1})), \quad 0 < \rho \leq c. \quad (3.26)$$

4. Si  $\|u_l^{i+1} - u_l^i\| < \epsilon, \forall l = k, \dots, k+N$ , et  $\|p^{i+1} - p^i\| < \epsilon$  alors on arrête, si non aller au pas 2 avec maintenant  $i$  incrémentée de 1

La solution du pas 2 (calcul de la fonction duale) est réalisée en utilisant la méthode de l'état adjoint qui est détaillée ci-après.

Dans cet objectif, les dynamiques des états des matrices  $P_k$  et  $W_k$  sont écrites sous forme vectorielle. Sachant que toutes les deux sont symétriques, on désigne par  $z_l$  et  $w_l$  les vecteurs de la partie triangulaire inférieure (supérieure) de  $P_l$  et  $W_l$  respectivement, et  $F_P(z_l, u_l)$  et  $F_W(w_{l+1}, u_l)$  les vecteurs de la partie triangulaire inférieure (supérieure) de  $P_{l+1}$  et  $W_l$  respectivement. On obtient les dynamiques suivantes  $z_{l+1} = F_P(z_l, u_l)$  et  $w_l = F_W(w_{l+1}, u_l)$ . On considère que  $T(z_l) = \operatorname{Tr}(P_l)$ , le problème d'optimisation peut être ré-écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \min_{\{u_l\}_{l=k,k+N}} & = qT(z_{k+N}) + \sum_{l=k}^{k+N-1} \left\{ T(z_l) + \frac{r}{2} \|u_l\|^2 \right\} \\ & + \frac{1}{2c} ((\max(0, p^i + cI(w_{k+N})))^2 - (p^i)^2) \end{aligned} \quad (3.27)$$

avec  $i$  l'itération duale et sous :

$$\begin{aligned} z_{l+1} &= F_P(z_l, u_l), \quad z_k \text{ donné par } P_k \text{ au début de la fenêtre} \\ w_l &= F_W(w_{l+1}, u_l), \quad w_{k+N} = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Pour résoudre cette optimisation, on utilise un Lagrangien et les conditions de Kuhn-Tucker, le Lagrangien peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 L(\{u_l\}_{l=k, k+N-1}, \{z_l\}_{l=k, k+N-1}, \{w_l\}_{l=k, k+N-1}, \{\lambda_l^1\}_{l=k, k+N-1}, \{\lambda_l^2\}_{l=k, k+N-1}, p) = \\
 = qT(z_{k+N}) + \sum_{l=k}^{k+N-1} \{T(z_l) + \frac{r}{2}\|u_l\|^2 + \lambda_{l+1}^1(F_P(z_l, u_l) - z_{l+1}) + \\
 + \lambda_{l+1}^2(F_W(w_{l+1}, u_l) - w_l) + \frac{1}{2c}\{\max(0, p^i + cI(w_k))^2 - (p^i)^2\}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

les conditions de Kuhn-Tucker sur l'entrée sont :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow ru_l + \frac{\partial F_P}{\partial u_l}(z_l, u_l)\lambda_{l+1}^1 + \frac{\partial F_W}{\partial u_l}(w_{l+1}, u_l)\lambda_{l+1}^2, \\
 \text{avec } l = k, \dots, k+N-1
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

puis, les conditions sur les états  $z$  donnent :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial z_l} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial z_l}(z_l) + \frac{\partial F_P}{\partial z_l}^T(w_l, u_l)\lambda_{l+1}^1 - \lambda_l^1 = 0 \\
 \text{avec } l = k+1, \dots, k+N-1 \\
 \frac{\partial L}{\partial z_{k+N}} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{k+N}^1 - q\frac{\partial T}{\partial z_{k+N}}(z_{k+N}) = 0
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

et finalement les conditions sur les états  $w$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial w_l} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_{l+1}^2 + \frac{\partial F}{\partial w_l}(w_l, u_{l-1})^T \lambda_l^2 = 0 \\
 \text{avec } l = k+1, \dots, k+N-1 \\
 \frac{\partial L}{\partial w_k} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_{k+1}^2 + \max(0, p^i + cI(w_k))\frac{\partial I}{\partial w_k}(w_k) = 0 \\
 \text{avec } I(w_k) = -\det(W_k - \alpha I_d)
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Pour résoudre ce problème d'optimisation, il s'agit de trouver  $\lambda_{k+1}^1$  et  $\lambda_{k+N}^2$  tels que :

$$\begin{aligned}
 \lambda_{k+N}^1 &= q\frac{\partial T}{\partial z_{k+N}}(z_{k+N}) \\
 \lambda_{k+1}^2 &= \max(0, p^i + cI(w_k))\frac{\partial I}{\partial w_k}(w_k)
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

qu'en pratique signifie trouver le zero d'une fonction  $F(\lambda_{k+1}^1, \lambda_{k+N}^2)$ .

Pour "intégrer" les équations canoniques (3.28)-(3.28), en remarquant que les équations (3.31) sont en temps rétrograde alors que les équations (3.32) sont en temps direct, l'idée est

de résoudre le système non linéaire suivant à chaque transition  $(l, l+1)$  :

$$\begin{aligned}
z_{l+1} &= F_P(z_l, u_l) \\
w_l &= F_W(w_{l+1}, u_l) \\
\lambda_l^1 &= \frac{\partial F_P}{\partial z_l}(z_l, u_l)^T \lambda_{l+1}^1 + \frac{\partial T}{\partial z_l}(z_l) \\
\lambda_{l+1}^2 &= \frac{\partial F_W}{\partial w_l}(w_l, u_{l-1})^T \lambda_l^2 \\
0 &= ru_l + \frac{\partial F_P}{\partial u}(z_l, u_l)^T \lambda_{l+1}^1 + \frac{\partial F_W}{\partial u}(w_{l+1}, u_l)^T \lambda_{l+1}^2
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Ce système est composé de 5 équations avec 5 inconnus  $(z_{l+1}, w_l, \lambda_{l+1}^1, \lambda_l^2, u_l, u_{l-1})$  en sachant que  $(z_l, w_{l+1}, \lambda_l^1, \lambda_{l+1}^2)$  sont tous connus. On répète (3.34) de  $l = k+1$  à  $k+N-1$ , et on obtient alors un système à  $5(N-1)$  équations avec  $5(N-1)$  inconnus, ce qui permet de calculer  $\lambda_{k+N}^1 - q \frac{\partial T}{\partial z_{k+N}}(z_{k+N})$  et  $\lambda_{k+1}^2 - \max(0, p^i + cI(w_k) \frac{\partial I}{\partial w_k}(w_k))$  et donc d'évaluer la fonction  $F(\lambda_{k+1}^1, \lambda_{k+N}^2)$ . Si cette fonction est nulle alors la séquence d'entrée  $\{u_l^i\}_{l=k, k+N}$  est la solution au problème d'optimisation (3.25).

**Remarque 3.4.** *Si on veut étendre cette approche aux systèmes affines en l'état avec injection de sortie  $(A(u_k, y_k))$ , l'équation de Riccati va dépendre de la sortie  $y_k$ , pour prédire la sortie dans la fenêtre d'optimisation on devra utiliser l'estimation de l'état  $\hat{x}_k$ , ce qui implique que la solution du problème d'optimisation va être fonction de l'état estimé  $(u_k^*(\hat{x}_k))$ . En conséquence, le grammien va être donc fonction de l'état estimé  $(W(u(\hat{x})))$  et donc, avec cette technique, on ne pourra pas garantir l'observabilité du système car elle va dépendre de l'état du système qu'on ne connaît pas.*

### 3.3.3 Exemple illustratif

Pour illustrer l'approche discutée ci-avant, on considère le système discret suivant :

$$\begin{aligned}
x_{1,k+1} &= x_{1,k} + x_{2,k}T_e u_k + x_{3,k}T_e \\
x_{2,k+1} &= x_{2,k} \\
x_{3,k+1} &= x_{3,k} \\
y_k &= x_{1,k}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

avec  $T_e = 1s$  le temps d'échantillonnage.

On peut ré-écrire le système sous forme matricielle avec :

$$\begin{aligned}
A(u_k) &= \begin{bmatrix} 1 & T_e u_k & T_e \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
C &= [1 \quad 0 \quad 0]
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Les matrices de covariances du bruit d'état  $Q$  et de sortie  $R$  sont supposées être connues :

$$\begin{aligned} R &= 10^{-2} \\ Q &= 10^{-3} I_d \end{aligned} \tag{3.37}$$

Ce système est non uniformément observable, par exemple si  $u = 0$  alors  $x_2$  est non distinguable à partir des mesures des variables de sortie. Une analyse plus détaillée sur l'observabilité de ce système, basée sur le grammien d'observabilité peut se trouver dans [80].

Selon les dimensions des matrices (3.36),  $P$  est une matrice carrée de dimension  $3 \times 3$  et le vecteur  $z$ , représentant ses états, est un vecteur de dimension  $1 \times 6$ , tandis que la dérivée de la fonction  $T(z_l)$  peut être calculée analytiquement, ce qui résulte en :

$$\frac{\partial T(z_l)}{\partial z_l} = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]^T \tag{3.38}$$

Par contre, les dérivés de  $F(z_l, u_l)$  sont extrêmement difficiles à résoudre analytiquement, et une solution alternative est de calculer une approximation numérique.

En pratique, le problème d'optimisation (3.32) a été résolu en utilisant Scilab [38] et toutes les simulations ont été effectuées dans le même logiciel. Les paramètres de l'algorithme ont été choisis comme  $q = 1000$ ,  $r = 10$ ,  $c = 0.1$  et  $\rho = c$ , ce qui favorise le premier objectif, la minimisation de la trace de  $P$  à la fin de la fenêtre de temps, tout en minimisant l'énergie de l'entrée et la trace de  $P$  à l'intérieur de la fenêtre. La taille de la fenêtre glissante choisie est égale à 3 pas.

Une première entrée persistante, optimale par rapport à l'énergie et basée uniquement sur le grammien, est utilisée pour pré-calculer l'ensemble  $\mathcal{P}_0$  où la condition initiale  $P_0$  est utilisée à fin de comparer les performances de la nouvelle entrée par rapport à l'ancienne.

Choissant un état l'initial  $P_0 \in \mathcal{P}_0$  :

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0.0180 & -0.0052 & 0.0052 \\ -0.0052 & 0.0076 & -0.0005 \\ 0.0052 & -0.0005 & 0.0039 \end{bmatrix}^T \tag{3.39}$$

alors le vecteur correspondant  $z_0$  est :

$$z_0 = [0.0180 \quad -0.0052 \quad 0.0052 \quad 0.0076 \quad -0.0005 \quad 0.0039]^T \tag{3.40}$$

Dans toutes les figures présentées dans ce chapitre, la couleur rouge représente l'entrée générée par le grammien et la couleur bleue est la solution d'entrée du problème de minimisation (3.15).

Les deux signaux sont illustrés dans la figure 3.7 avec également l'évolution dans le temps des valeurs propres de  $P$  lorsque chaque entrée est appliquée. Avec l'entrée optimale obtenue, l'observateur peut être mis en œuvre sur le système. Le but des prochaines simulations est

de comparer les performances d'estimation de l'observateur avec deux entrées différentes de même énergie moyenne.

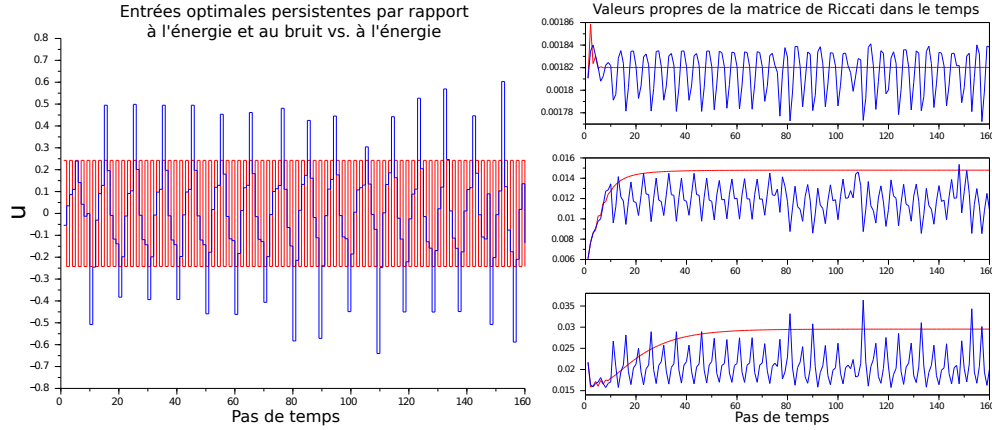


FIGURE 3.7 – Entrée optimale et valeurs propres de la matrice de Riccati

La figure 3.8 montre le système sous les deux entrées et les effets du bruit, dans les deux cas, avec comme conditions initiales  $x_0 = [1, 20, -0.3]^T$ ,  $\hat{x}_0 = [0, 0, 0]^T$  et  $P_0$ , et même bruit gaussien blanc et aléatoire. On peut remarquer que l'entrée n'est pas calculée afin de commander le système mais afin d'optimiser les performances de l'estimation de l'observateur. La figure 3.9 illustre l'erreur d'estimation, avec les différentes dynamiques produites par les deux différentes entrées, qui converge à zéro. Dans cette approche, les états du système ne sont pas censés être stabilisés, cependant, l'accent est mis sur la minimisation de la norme de l'erreur d'estimation, et ceci met en évidence que les meilleures performances de l'observateur sont obtenues lorsque l'entrée optimale est calculée à partir de l'algorithme présenté dans ce chapitre. Dans la même figure apparaît l'évolution de la trace de la matrice  $P$ , et clairement le nouvel algorithme (en bleu) produit une trace inférieure.

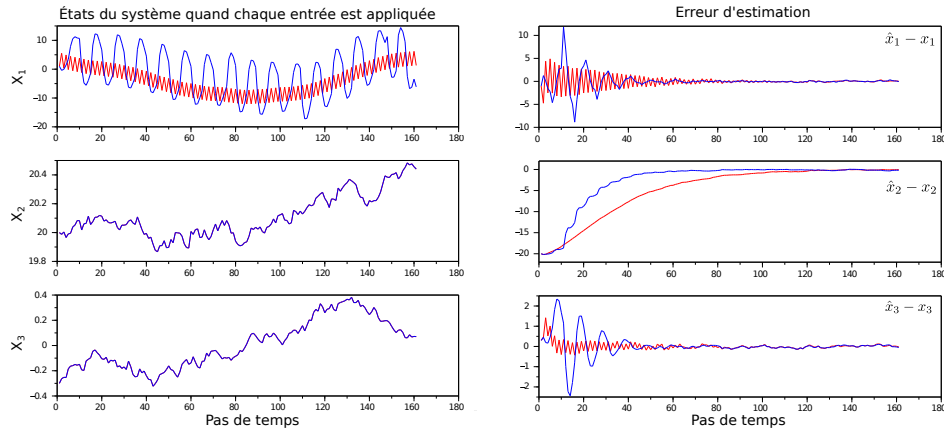


FIGURE 3.8 – États du système et estimation des erreurs.

Dans la dernière figure, figure 3.10, nous pouvons voir la norme de chaque erreur d'estimation et la plus petite valeur propre du grammien d'observabilité pour une fenêtre de 4 pas. Les plus petites valeurs propres ne sont jamais inférieures à 0.0013, ce qui garantit l'observabilité

du système à chaque fois.

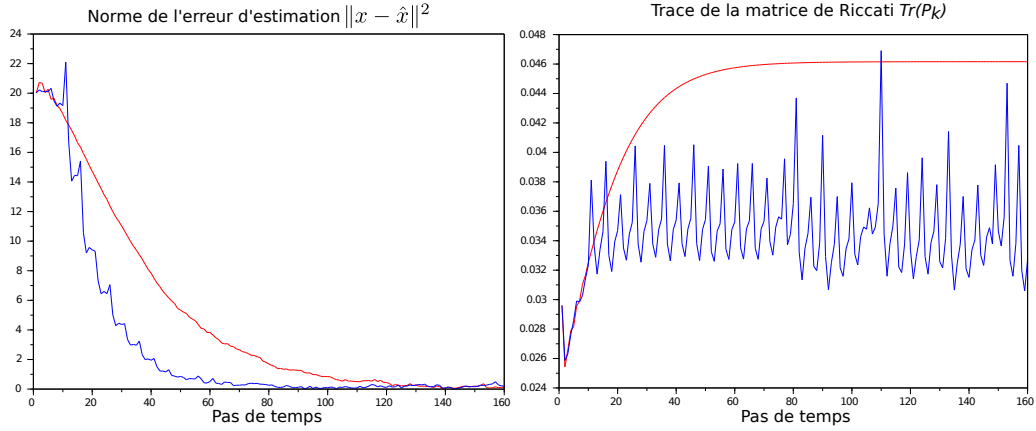


FIGURE 3.9 – Norme de l’erreur d’estimation et traces de la solution de Riccati.

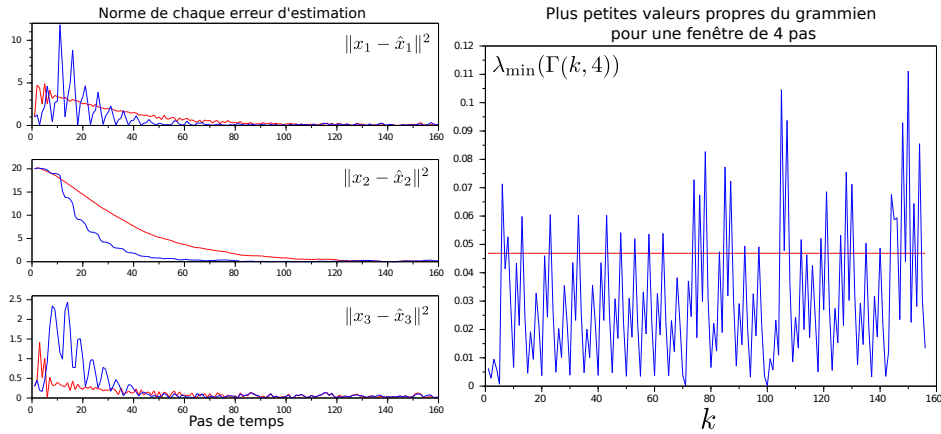


FIGURE 3.10 – Normes de chaque erreur d’estimation et plus petites valeurs propres du grammien d’observabilité pour des fenêtres de 4 pas.

### 3.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons étendu l’exploration des façons de construire de “bonnes entrées” pour l’observation de systèmes non uniformément observables initiée au chapitre 2, en proposant d’abord le problème d’emblée comme un problème de commande.

Une formulation générale sur la base de structure affine avec perturbation triangulaire a été tout d’abord présentée, soulignant l’idée de commande d’équation d’observateur comme façon de résoudre le problème. L’objectif de commande a alors été donné sous forme d’optimisation, avec illustration par un exemple.

Une étude plus particulière a ensuite été proposée pour le cas des systèmes affines en l’état, pour lesquels l’approche d’optimisation par la commande proposée, permet d’améliorer



les performances de l'observateur de Kalman déjà optimal vis-à-vis de l'effet des bruits.

Tous ces développements supposent que l'entrée optimale n'affecte pas le fonctionnement du système, et le couplage de cette optimisation avec des objectifs de commande pourra être exploré à l'avenir.

Ils peuvent néanmoins être d'emblée utiles pour de seuls objectifs de surveillance, comme illustré par la seconde partie du manuscrit.

## Deuxième partie

# Contributions à la surveillance de pipelines “par observateurs”



# Rappels sur la modélisation de pipelines avec défauts et les techniques de surveillance associées

---

## Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>53</b>
<b>4.2</b>	<b>Modèle en dimension infinie . . . . .</b>	<b>54</b>
4.2.1	Équations du coup de bélier . . . . .	54
4.2.2	Calcul des profils d'équilibre . . . . .	55
4.2.3	Conditions aux limites . . . . .	55
4.2.4	Conditions à l'amont et à l'aval . . . . .	56
4.2.5	Conditions internes . . . . .	56
<b>4.3</b>	<b>Modèle en différences finies . . . . .</b>	<b>59</b>
4.3.1	Méthode des différences finies implicite en temps . . . . .	59
4.3.2	Conditions internes pour une fuite . . . . .	60
<b>4.4</b>	<b>Modèle linéaire fréquentiel . . . . .</b>	<b>60</b>
4.4.1	Matrice de transition . . . . .	61
4.4.2	Raccordement de deux canalisation . . . . .	63
4.4.3	Plaque à orifice : Modélisation d'une vanne, une obstruction et une fuite .	64
4.4.4	Observabilité d'une canalisation . . . . .	66
<b>4.5</b>	<b>Surveillance à partir du modèle en différences finie . . . . .</b>	<b>66</b>
4.5.1	Estimation de la position d'une seule fuite . . . . .	67
4.5.2	Estimation de la position et taille d'une seule fuite et un coefficient de friction unique . . . . .	68
<b>4.6</b>	<b>Surveillance à partir du modèle fréquentiel . . . . .</b>	<b>70</b>
<b>4.7</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>73</b>

---

## 4.1 Introduction

Comme pour la première partie, ce chapitre initial rappelle les outils de base pré-existants, et qui nous seront utiles pour la suite, cette fois pour l'enjeu de surveillance des pipelines (au sens de détection et localisation de défauts) à base de modèles.

Premièrement, il introduit les équations en dimension infinie qui régissent les écoulements en pipelines, ainsi que les approximations par différences finies ou linéaires fréquentielles associées, déjà disponibles dans la littérature. La modélisation des canalisations sous pression a en effet été largement étudiée durant les deux dernières décennies (par exemple dans [67, 68, 117, 78, 89, 46, 76, 10, 11, 90]), et l'objectif qui nous intéresse est de pouvoir reproduire numériquement de façon fiable et avec complexité de calcul gérable, les phénomènes qui prédominent réellement dans ce type de système, ainsi que les effets des défauts à surveiller.

Le problème de détection et localisation de défauts à base de modèle dans les pipelines a aussi fait l'objet de bon nombre de travaux dans la littérature ces dernières années (voir par exemple [47, 8, 20, 26, 74, 75, 109, 65, 66, 25, 34]), et dans un deuxième temps de ce chapitre, les deux principaux types de méthodes, s'appuyant sur les modèles précédemment rappelés, sont résumés : d'une part l'approche par observateurs d'état, comme dans [37, 103, 97] par exemple, sur la base d'un modèle temporel à différences finies, et d'autre part une approche plus fréquentielle, comme proposé dans [69, 28, 110] par exemple.

## 4.2 Modèle en dimension infinie

### 4.2.1 Équations du coup de bélier

En hydraulique, le régime transitoire des écoulements sous pression est décrit par un ensemble d'équations aux dérivées partielles hyperboliques quasi-linéaires connues comme équations du coup de bélier. Cet ensemble est composé d'une équation de continuité (4.2) et une équation dynamique (4.1). L'obtention rigoureuse et la formulation complète de ces équations peuvent se trouver dans [28] :

$$0 = \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} + gA \frac{\partial H(x,t)}{\partial x} + \frac{fQ(x,t)|Q(x,t)|}{2DA} \quad (4.1)$$

$$0 = \frac{\partial H(x,t)}{\partial t} + \frac{c^2}{gA} \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} \quad (4.2)$$

pour  $x \in (0, L)$  et  $t \in (0, \infty)$ . Avec  $t$  and  $x$  : Coordonnées du temps et d'espace dans le sens de l'écoulement,  $L$  : Longueur de la canalisation,  $H$  : Pression,  $Q$  : Débit,  $c$  : Vitesse de l'onde de pression,  $g$  : accélération de la gravité,  $A$  : Section transversale,  $D$  : Diamètre de la canalisation et  $f$  : Coefficient de friction.

**Remarque 4.1.** Les équations (4.1) et (4.2) sont valides sous les hypothèses suivantes :

- La densité de l'eau et l'aire de la section transversale sont considérées constantes.
- Le débit dans la conduite est unidimensionnel.
- La distribution de la vitesse est uniforme à travers la section transversale de la conduite.

On peut écrire les équations (4.1)-(4.2) sous la forme matricielle suivante (voir [115]) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} Q \\ H \end{bmatrix} = -B(Q, H) \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} Q \\ H \end{bmatrix} - G(Q, H) \quad (4.3)$$

avec :

$$B(Q, H) = \begin{bmatrix} 0 & gA \\ \frac{c^2}{gA} & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(Q, H) = \begin{bmatrix} \frac{f}{2DA} Q |Q| \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice  $B(Q, H)$  est :

$$\lambda^2 - c^2 = 0 \quad (4.4)$$

donc, les valeurs propres sont  $\lambda_{1,2} = \pm c$ . Puisque  $c$  est réel les deux valeurs propres sont réelles et distinctes, et par conséquent, les équations (4.1)-(4.2) sont un ensemble d'équations du type hyperbolique.

#### 4.2.2 Calcul des profils d'équilibre

Les conditions d'équilibre sont obtenues en posant dans les équations (4.2)-(4.1) :

$$\frac{\partial H(x, t)}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = 0$$

Les points d'équilibre en pression et en débit sont alors solutions des équations différentielles suivantes :

$$\frac{\partial Q_e(x)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial H_e(x)}{\partial x} = -\frac{f}{2DgA^2} Q_e(x) |Q_e(x)| \quad (4.5)$$

A l'équilibre, le débit est donc constant quelle que soit la valeur  $x$  (profil uniforme du débit à l'équilibre  $Q_e(x) = Q_e$ ,  $\forall x$ ). L'équation de droite (4.5) est appelée l'équation de Darcy-Weisbach. Elle permet de calculer la perte de charge due à la friction dans une conduite.

#### 4.2.3 Conditions aux limites

Afin de compléter les équations du coup de bélier, on a besoin des conditions aux limites et des conditions initiales. Les conditions aux limites expriment les profils temporaires des variables aux valeurs de bord des coordonnées spatiales, et les conditions initiales expriment leurs profils spatiaux à l'instant initial. Les conditions initiales peuvent s'écrire sous la forme

suivante :

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= H_0(x) \\ Q(x, 0) &= Q_0(x) \end{aligned}$$

Les équations du coup de bélier décrivent correctement l'écoulement le long de canaux sans composant (pompes, vannes, réservoirs, etc.), ni singularités (fuites, prises d'eau, etc.). A chaque occurrence de composants ou de singularités, il faut introduire des équations d'interconnexion qui définissent les conditions aux limites de l'écoulement filaire qui les sépare. Ces équations d'interconnexion ou conditions aux limites sont classées en conditions aux limites amont, aval ou internes.

#### 4.2.4 Conditions à l'amont et à l'aval

On doit utiliser une condition limite à l'amont et une condition limite à l'aval, soit une pression soit un débit, de sorte qu'on a quatre conditions possibles :  $H_{in}$ ,  $H_{out}$ ,  $Q_{in}$ ,  $Q_{out}$ , donc, quatre différentes combinaisons des quatre conditions possibles :  $H_{in} - H_{out}$ ,  $Q_{in} - H_{out}$ ,  $H_{in} - Q_{out}$ ,  $Q_{in} - Q_{out}$ . Dans un contexte physique, les conditions aux limites sont des relations entre le débit et la pression qui représentent des composants dans une canalisation. Ces relations sont appelées lois d'ouvrages. Des exemples de lois d'ouvrages sont listés dans la Table 4.1 En conclusion, les conditions aux limites sont définies par une loi d'ouvrage à l'amont aussi bien qu'à l'aval.

Composant	Équation
Vanne	$CA\sqrt{2gH(pos, t)}$
Réservoir constant	$H(pos, t) _{\frac{\partial H(pos, t)}{\partial t}=0}$
Pompe centrifuge	$H(pos, t) = H(ext, t) + A_P Q(pos, t)^2 + B_P Q(pos, t) + C_P$
Résistance	$H(pos, t) = H(ext, t) - RQ(pos, t)^2$

TABLE 4.1 – Exemples de Lois d'ouvrages

$C$ ,  $A_P$ ,  $B_P$  et  $C_P$  sont respectivement les coefficients de décharge et de l'équation quadratique de la pompe, l'indice " $pos$ " représente la position dans la canalisation (à l'aval ou à l'amont) et l'indice " $ext$ " fait référence à l'extérieur de la canalisation.

#### 4.2.5 Conditions internes

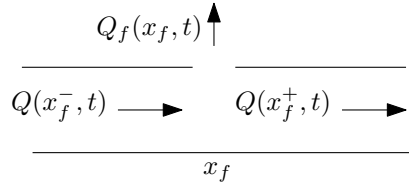
Une condition interne se situe par définition entre les conditions à l'amont et à l'aval. Elle peut être, par exemple : une fuite, une prise d'eau, une obstruction, etc. Les conditions internes représentent une discontinuité des solutions aux équations dans le domaine spatial. Les conditions internes considérées dans cette étude sont présentées ci-après. Ce sont les pertes de débit causées par des fuites ou des obstructions dans une canalisation.

## 4.2.5.1 Fuite

Une fuite provoque une discontinuité sur (4.2). Si elle se présente à la position  $x = x_f$  avec une perte de débit,  $Q_f(x_f, t)$ , l'équation (4.2) reste toujours valide pour  $x \in [0, x_f[ \cup ]x_f, L](x \neq x_f)$ , voir figure 4.1. Cependant, elle ne l'est plus au voisinage de  $x_f$ . La conservation de la masse en  $x \in [x_f^-, x_f^+]$  requiert que :

$$Q(x_f^-, t) - Q(x_f^+, t) = Q_f(x_f, t) \quad (4.6)$$

avec  $Q(x_f^-, t)$  : débit avant  $x_f$ ,  $Q(x_f^+, t)$  : débit après  $x_f$ .

FIGURE 4.1 – Fuite localisée à  $x_f$ 

Si nous supposons que la fuite introduit un moment négligeable, l'équation (4.1) n'est pas affectée en  $x = x_f$ . [2]

La perte de débit en  $x_f$  est donnée par la relation débit pression suivante [79, 92, 105] :

$$Q_f(x_f, t) = \mathbb{H}(t) F \sqrt{H(x_f, t)} \quad (4.7)$$

où  $F = A_f C_f \geq 0$ , avec  $A_f$  : l'aire de la fuite,  $C_f$  : le coefficient de décharge,  $\mathbb{H}(t)$  : la fonction de Heaviside (4.8), indicatrice de l'occurrence d'une fuite à l'instant  $t_f$  :

$$\mathbb{H}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_f \\ 1 & \text{si } t \geq t_f \end{cases} \quad (4.8)$$

Pour le cas d'occurrence de plusieurs fuites, nous définissons  $Q_{f_k}(x_{f_k}, t)$  comme étant les pertes de débit dont  $k$  est l'indice de fuite. Les occurrences de fuite seront représentées par  $H_k(t)$  associées aux pertes de débit  $Q_{f_k}(x_{f_k}, t)$ , aux instants de fuites  $t_{f_k}$ , coefficients  $F_k$ , et positions  $x_{f_k}$ .

## 4.2.5.2 Obstruction ponctuelle

Contrairement à la fuite, une obstruction provoque une discontinuité sur l'équation (4.1). Quand elle se présente en  $x = x_{obs}$ , elle produit un saut en pression  $H_{obs}$ .

Considérons ici le cas d'une obstruction ponctuelle qui peut être modélisée une plaque à orifice comme dans [28]. La figure 4.2 illustre une canalisation avec une obstruction de type en  $x = x_{obs}$ ,  $H^-$  représente la pression à la position juste avant l'obstruction (celle-ci est



localisée à la position  $x_{obs}^-$ ). Cette pression peut être exprimée en fonction des autres variables en utilisant l'équation de Bernoulli entre  $x_{obs}^-$  et  $x_{obs}$  ([15]) :

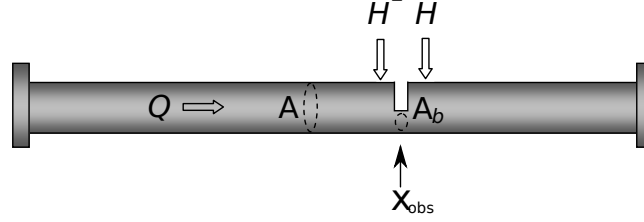


FIGURE 4.2 – Canalisation avec une obstruction ponctuelle

$$P^- + \frac{\rho^-(V^-)^2}{2} + \rho^-gh^- + P_W - P_L = P + \frac{\rho(V)^2}{2} + \rho gh \quad (4.9)$$

avec la notation de  $P$  pour la pression du fluide,  $V$  pour la vitesse du fluide,  $\rho$  pour la densité du fluide,  $h$  pour la hauteur d'écoulement,  $P_W$  pour l'énergie fournie à l'entrée,  $P_L$  pour les pertes dans la canalisation, et l'exposant “-” pour les variables correspondant à  $x_{obs}^-$ . Comme le débit est incompressible, les hauteurs d'écoulement sont les mêmes à  $x_{obs}$  et  $x_{obs}^-$ , et l'énergie fournie est zero (pour ce cas spécifique). On obtient donc :

$$P^- + \frac{\rho(V^-)^2}{2} = P + \frac{\rho(V)^2}{2} - P_L$$

de plus par continuité :

$$\rho V^- A = \rho V A_b \rightarrow V^- = V \frac{A_b}{A}$$

avec  $A_b$  l'aire de la section transversale où se présente l'obstruction. En combinant ces deux équations, on obtient :

$$P^- = P - \frac{\rho(V)^2}{2} \left[ \left( \frac{A_b}{A} \right)^2 - 1 \right] - P_L$$

En utilisant que  $Q = VA$  et  $P = \rho gH$ , on obtient finalement :

$$H^- = H - \frac{Q^2}{2gA^2} \left[ 1 - \left( \frac{A}{A_b} \right)^2 \right] - h_L$$

Le terme  $h_L$  représente les pressions associées aux pertes, qui sont très difficiles à obtenir à cause de leur dépendance débit et à la géométrie de celui-ci. Pour des raisons pratiques, dans ce travail, ce terme va être considéré comme nul, ce qui signifie considérer le pire des cas et donc l'obstruction modélisée sera toujours plus grande que l'obstruction réelle. Comme pour la fuite, on utilise la fonction de Heaviside (4.8) pour pouvoir créer l'obstruction à partir d'un

certain temps  $t_{obs}$  et on obtient pour l'obstruction :

$$H^-(t) = H(t) - \mathbb{H}(t) \frac{Q(t)^2}{2gA^2} \left[ 1 - \left( \frac{A}{A_b} \right)^2 \right] \quad (4.10)$$

Pour conclure, on peut modéliser une vanne comme une obstruction ponctuelle avec une aire d'obstruction variable dans le temps.

## 4.3 Modèle en différences finies

### 4.3.1 Méthode des différences finies implicite en temps

Il existe plusieurs formes de différences finies [72]. Dans le cas implicite en temps retenu ici, le principe en bref est une discrétisation spatiale selon le schéma de la figure 4.3. Avec les approximations et simplifications suivantes :

- ★  $H(x, t) \cong H_i(t)$  pression à l'abscisse spatiale d'indice  $i$ .
- ★  $Q(x, t) \cong Q_i(t)$  débit à l'abscisse spatiale d'indice  $i$ .
- ★  $\frac{\partial H(x, t)}{\partial t} \cong \dot{H}_i(t)$  variation temporelle de pression à l'abscisse spatiale d'indice  $i$ .
- ★  $\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \cong \dot{Q}_i(t)$  variation temporelle de débit à l'abscisse spatiale d'indice  $i$ .

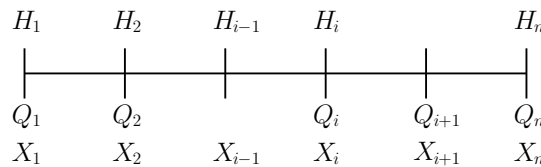


FIGURE 4.3 – Discrétisation spatiale d'une canalisation

Les dérivées partielles par rapport à  $x$  sont approchées par différences finies du premier ordre (à droite ou à gauche) :

$$\begin{aligned} \star \frac{\partial H(x, t)}{\partial x} &\approx \frac{\Delta H_i(t)}{\Delta x_i} = \frac{H_{i+1} - H_i}{\Delta x_i} \text{ ou } \frac{H_i - H_{i-1}}{\Delta x_i}. \\ \star \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} &\approx \frac{\Delta Q_i(t)}{\Delta x_i} = \frac{Q_{i+1} - Q_i}{\Delta x_i} \text{ ou } \frac{Q_i - Q_{i-1}}{\Delta x_i}. \end{aligned}$$

Il faut juste remarquer que le modèle discret du système (4.2)-(4.1) dépend des conditions aux limites utilisées ce qui fait qu'il existe quatre modèles possibles pour les quatre paires de conditions possibles. Ces modèles sont résumés dans le tableau 4.2.

Condition Limites	Équations	
$H_{in}$ et $H_{out}$	$\dot{Q}_i = \frac{a_1}{\Delta x_i}(H_i - H_{i+1}) - a_3 Q_i  Q_i $ $\dot{H}_{i+1} = \frac{a_2}{\Delta x_i}(Q_i - Q_{i+1})$	$H_1 = H_{in}$ $H_{n+1} = H_{out}$
$Q_{in}$ et $H_{out}$	$\dot{Q}_{i+1} = \frac{a_1}{\Delta x_i}(H_i - H_{i+1}) - a_3 Q_{i+1}  Q_{i+1} $ $\dot{H}_i = \frac{a_2}{\Delta x_{i-1}}(Q_i - Q_{i+1})$	$Q_1 = Q_{in}$ $H_n = H_{out}, \Delta x_0 = 1$
$H_{in}$ et $Q_{out}$	$\dot{Q}_i = \frac{a_1}{\Delta x_i}(H_i - H_{i+1}) - a_3 Q_i  Q_i $ $\dot{H}_{i+1} = \frac{a_2}{\Delta x_i}(Q_i - Q_{i+1})$	$H_1 = H_{in}$ $Q_n = Q_{out}, \Delta x_0 = 1$
$Q_{in}$ et $Q_{out}$	$\dot{Q}_{i+1} = \frac{a_1}{\Delta x_i}(H_i - H_{i+1}) - a_3 Q_{i+1}  Q_{i+1} $ $\dot{H}_i = \frac{a_2}{\Delta x_i}(Q_i - Q_{i+1})$	$Q_1 = Q_{in}$ $Q_{n+1} = Q_{out}, \Delta x_0 = 1$
	avec $a_1 = -gA$ , $a_2 = -\frac{c^2}{gA}$ et $a_3 = \frac{f}{2DA}$	

TABLE 4.2 – Différents modèles de discrétisation dépendant des conditions aux limites

### 4.3.2 Conditions internes pour une fuite

Quand une fuite se présente dans le système, l'équation (4.6) qui représente la conservation de la masse doit être considérée afin d'imposer la condition interne. Si on applique la méthode des différences finies quand une fuite se présente entre les sections  $x_i$  et  $x_{i+1}$ , l'équation (4.6) devient :

$$Q_i - Q_{i+1} - Q_{f_k} = 0$$

Donc, à chaque occurrence d'une fuite, la relation des débits entre les deux sections

$$\frac{\Delta Q_i}{\Delta x_i} = \frac{Q_i - Q_{i+1}}{\Delta x_i}$$

doit être remplacée par

$$\frac{\Delta Q_i}{\Delta x_i} = \frac{Q_i - Q_{i+1} - Q_{f_k}}{\Delta x_i} \quad (4.11)$$

avec  $Q_{f_k}$  exprimé par l'équation (4.7) (et  $k$  comme étant l'indice de fuite).

## 4.4 Modèle linéaire fréquentiel

Dans ce paragraphe, notre objectif est de rappeler le modèle linéaire d'une canalisation dans le domaine fréquentiel sujette à des défauts développé en détails dans [28]. A partir des équations du coup de bélier et supposant une entrée sinusoïdale on obtient une fonction de transfert pour une section d'une canalisation, puis avec l'équation de Bernoulli on arrive à modéliser une vanne, qui servira d'excitation, et deux type de défauts possibles, une fuite et une obstruction ponctuelle.

## 4.4.1 Matrice de transition

Comme mentionné, le modèle fréquentiel suppose que la canalisation est excitée par des petites variations de l'entrée sous forme sinusoïdale et qu'un temps suffisamment long est passé pour que toutes les variables oscillent avec une amplitude constante. Le régime transitoire est négligé et on considère seulement le régime oscillatoire sinusoïdal forcé (voir [93] pour plus de détails). Dans un premier temps, on linéarise les équations du coup de bélier, équations (4.5) et (4.1), autour d'un profil d'équilibre défini par les pressions  $H_0(x)$  et les débits  $Q_0(x)$  :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial(H_0 + h)}{\partial t} + \frac{c^2}{gA} \frac{\partial(Q_0 + q)}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial(Q_0 + q)}{\partial t} + gA \frac{\partial(H_0 + h)}{\partial x} + \frac{f(Q_0 + q)|(Q_0 + q)|}{2DA} \end{aligned}$$

où  $h$  et  $q$  sont les variations des pressions et débits respectivement. Par définition de l'équilibre,  $\frac{\partial Q_0}{\partial t}$  et  $\frac{\partial H_0}{\partial t}$  sont zero, et on a :

$$\frac{\partial H_0}{\partial x} = -\frac{fQ_0|Q_0|}{2DgA^2} \quad (4.12)$$

Une fois le profil d'équilibre obtenu, on linéarise le terme de friction non-linéaire  $\phi(x) = \frac{fx_0|x_0|}{2DgA^2}$  en utilisant le développement de Taylor :

$$\phi(x) = \phi(a) + \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_a (x - a) + \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_a \frac{(x - a)^2}{2} + \dots$$

en prenant  $x = Q_0 + q$  et  $a = Q_0$  et en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1, soit :

$$\frac{f(Q_0 + q)|Q_0 + q|}{2DA} \cong \frac{fQ_0|Q_0|}{2DA} + \frac{2f|Q_0|}{2DA} q \quad (4.13)$$

Finalement, à partir de (4.13) et de (4.12) on peut récrire les équations du coup de bélier, (4.5) et (4.1), linéarisées et sous petites variations autour du point d'équilibre :

$$0 = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{c^2}{gA} \frac{\partial q}{\partial x} \quad (4.14)$$

$$0 = \frac{\partial q}{\partial t} + gA \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{f|Q_0|}{DA} q \quad (4.15)$$

Maintenant en utilisant la méthode de séparation des variables on peut récrire l'équation (4.14) :

$$\partial h = -\frac{c^2}{gA} \frac{\partial q}{\partial x} \partial t$$

puis en injectant cette dernière dans (4.15) on arrive à :

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \frac{f|Q_0|}{c^2 DA} \frac{\partial q}{\partial t} \quad (4.16)$$

Si on considère que les variations sont uniquement sinusoïdales (avec fréquence  $\omega$ ) on peut récrire (4.16) dans le domaine fréquentiel (voir [29] et [63] pour plus détails) :

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \mu^2 q$$

avec :

$$\mu^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{j\omega f|Q_0|}{c^2 DA} \quad (4.17)$$

Cette équation à comme solution :

$$q = c_1 \sinh(\mu x) + c_2 \cosh(\mu x) \quad (4.18)$$

De la même façon, en injectant (4.18) dans (4.14) , on obtient :

$$h = -\frac{c^2 \mu}{jgA\omega} (c_1 \cosh(\mu x) + c_2 \sinh(\mu x)) \quad (4.19)$$

On va nommer  $q_{in}$  et  $h_{in}$  les valeurs des variables à la position  $x = 0$  et  $q_{out}$  et  $h_{out}$  pour la position  $x = L$ . En évaluant les équations (4.18) et (4.19) pour  $x = 0$  on obtient :

$$c_1 = -\frac{jgA\omega}{c^2 \mu} h_{in}$$

$$c_2 = q_{in}$$

et on peut écrire  $q_{out}$  et  $h_{out}$  en fonction de  $q_{in}$  et  $h_{in}$  :

$$\begin{aligned} q_{out} &= \cosh(\mu L) q_{in} - \frac{1}{Z_c} \sinh(\mu L) h_{in} \\ h_{out} &= -Z_c \sinh(\mu L) q_{in} + \cosh(\mu L) h_{in} \end{aligned} \quad (4.20)$$

avec  $Z_c$  l'impédance caractéristique ([116]) de la canalisation :

$$Z_c = \frac{\mu c^2}{j\omega gA} \quad (4.21)$$

En ré-écrivant les equations (4.20) sous forme matricielle, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_{out} = \begin{bmatrix} \cosh(\mu L) & -\frac{1}{Z_c} \sinh(\mu L) \\ -Z_c \sinh(\mu L) & \cosh(\mu L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_{in} \quad (4.22)$$

On appelle matrice de transition de la canalisation la matrice  $F$  :

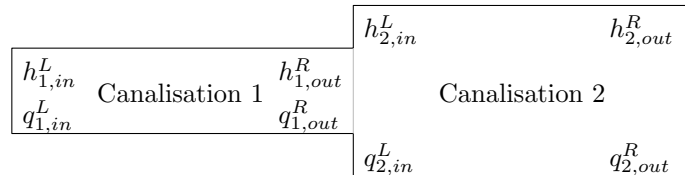
$$F = \begin{bmatrix} \cosh(\mu L) & -\frac{1}{Z_c} \sinh(\mu L) \\ -Z_c \sinh(\mu L) & \cosh(\mu L) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Dans le cas où il n'y aurait pas de friction, i.e.  $f = 0$ , la linéarisation (4.13) n'est plus nécessaire, car l'équation (4.1) devient linéaire, et donc la matrice de transition de la solution exacte de (4.1) et (4.2) pour un régime oscillatoire permanent devient

$$F = \begin{bmatrix} \cos(\frac{L}{c}\omega) & -j\frac{gA}{c} \sin(\frac{L}{c}\omega) \\ -j\frac{c}{gA} \sin(\frac{L}{c}\omega) & \cos(\frac{L}{c}\omega) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

#### 4.4.2 Raccordement de deux canalisation

Le raccordement de deux canalisations (voir figure 4.4) ayant différents diamètres, épaisseurs de la paroi, matériaux de paroi ou n'importe quelle combinaison de ses variables nécessite un *module de raccordement*. Tout au long de ce manuscrit on utilisera les indice “ $L$ ” et “ $R$ ” pour designer les variables aux extrémités, gauche et droite respectivement, d'une section de canalisation.



$$h_{i+1}^L = h_i^R \quad (4.26)$$

ce qui donne sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_{i+1}^L = P_{rc} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_i^R \quad (4.27)$$

où la matrice de raccordement  $P_{rc}$  (appelée *point matrix* dans [28]) est donc simplement :

$$P_{rc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

pour un simple raccord comme dans la figure 4.4.

Cette matrice sera utilisée lors de la modélisation d'une obstruction étendue, pour cela, on raccordera une section d'aire réduite entre deux section d'aire nominale d'une canalisation.

#### 4.4.3 Plaque à orifice : Modélisation d'une vanne, une obstruction et une fuite

La matrice de raccordement pour une vanne ou pour une plaque à orifice est déduite de la linéarisation de l'équation de la vanne ou de la plaque. Cette linéarisation n'introduit pas de grandes erreurs si les variations de pression sur la vanne sont petites par rapport au point de fonctionnement.

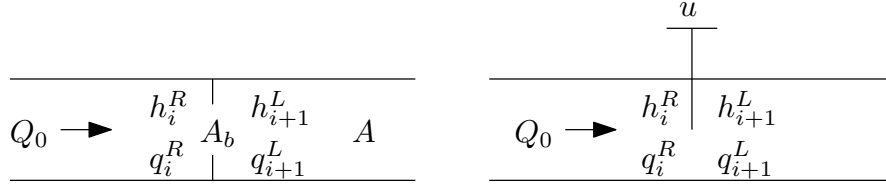
Premièrement sera considéré le cas d'une vanne oscillante, en supposant un mouvement sinusoïdal de l'ouverture de la vanne, comme illustré par la figure 4.5, on utilise la loi de Benoulli pour exprimer le débit à travers un orifice comme :

$$Q = C_d A_b \sqrt{2g|H^L - H^R|} \quad (4.29)$$

où  $C_d$  représente le coefficient de décharge,  $A_b$  c'est l'aire de l'orifice et les exposants  $^R, ^L$  se réfèrent à droit et gauche respectivement. En considérant des variations  $q, h$  et  $a_b$  autour d'un point d'équilibre défini par  $Q_0, H_0$  et  $A_{b0}$ , et en supposant aussi que les pressions décroissent de gauche à droite, on obtient :

$$q = \frac{C_d A_{b0} g}{\sqrt{2g \Delta H_0^{lr}}} (h^L - h^R) + a_b C_d \sqrt{2g \Delta H_0} \quad (4.30)$$

où  $\Delta H_0 = H_0^R - H_0^L$ . Par continuité, les débits entrant et sortant de l'orifice sont égaux

FIGURE 4.5 – Obstruction d'aire transversale  $A_b$  et vanne avec ouverture  $u$ 

$q_i^R = q_{i+1}^L$ , et si on modélise une obstruction ponctuelle, il n'y a pas de variation dans la taille de l'orifice, donc  $a_h = 0$ . Par contre si on modélise une vanne,  $A_b = U$  (et on définit  $U_0 = A_{b0}$  pour l'ouverture de la vanne en régime permanent). Sur ces bases, et à partir des notations utilisés dans la figure 4.5, on obtient les équations sous forme matricielle pour une vanne :

$$\begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_{i+1}^L = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{Q_0}{(CdU_0)^2} & 1 \end{bmatrix}}_{P_{ov1}} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_i^R + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{Q_0^2}{(CdU_0)^2 U_0 g} \end{bmatrix}}_{P_{ov2}} u \quad (4.31)$$

Dans le cas où l'ouverture est constante, on obtient la situation d'une obstruction ponctuelle, et la matrice de raccordement devient :

$$P_{obs} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2\Delta H_0}{Q_0} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

où  $\Delta H_0^x$  désigne le changement de pression entre les parties gauche et droite de l'obstruction, qui est inconnue.

Finalement, en utilisant une méthodologie similaire on peut modéliser une fuite dans une canalisation, comme illustré dans la figure 4.6 ; le débit de fuite peut s'écrire en fonction de la pression à partir de l'équation de Bernoulli comme :

$$Q_L = C_d A_L \sqrt{2gH_L} \quad (4.33)$$

où  $A_L$  est la taille de l'orifice de la fuite. En linéarisant autour d'un point d'équilibre, défini par  $Q_L$  et  $H_L$ , on obtient la relation suivante pour des petites variations :

$$q_L = \frac{C_d A_L g}{\sqrt{2gH_L}} h_L \quad (4.34)$$

et par continuité on sait que le débit après la fuite  $q_i^R = q_{i+1}^L - q_L$ , avec  $q_i^R$  et  $q_{i+1}^L$  la variation du débit de la fuite avant et après la fuite respectivement. On peut considérer que la fuite ne modifie pas l'équation dynamique, [2], donc  $h_i^R = q_{i+1}^L$ . On peut maintenant écrire la matrice de raccordement d'une fuite :

$$\begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_{i+1}^L = P_f \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_i^R \quad (4.35)$$



avec :

$$P_f = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{Q_L}{2H_L} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

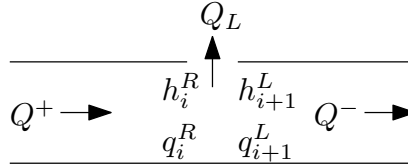


FIGURE 4.6 – Canalisation avec une fuite de débit  $Q_L$

#### 4.4.4 Observabilité d'une canalisation

L'observabilité des équations du coup de béliet en dimension infinie peut s'analyser sous les concepts et résultats d'observabilité présentés dans [62] et [61]. Les systèmes d'intérêt de ce travail sont représentés par des équations différentielles partielles hyperboliques quasi-linéaires unidimensionnels du premier ordre, avec des conditions aux limites non-linéaires générales. Dans le cas des équations différentielles partielles, les valeurs observées peuvent être, soit des valeurs à la frontière (sur le domaine frontière complet ou en une partie), soit des valeurs internes (sur le domaine complet ou en partie). Lorsque l'observabilité se réalise à partir des valeurs à la frontière, on parle d'observabilité exacte frontière.

Cependant, comme mentionné dans le travail [97], ces études ne considèrent pas l'existence de pertes de débit comme ce pourrait être le cas avec des fuites dans le système, ou des changements d'aire dus aux blocages dans la canalisation.

En vue de construire des observateurs pour la détection de défauts dans une canalisation, il faudra donc l'observabilité des équations du coup de béliet modifiées par la relation du défaut d'intérêt. Étant donné qu'il n'y a pas (jusqu'à présent) une méthodologie en dimension infinie pour déterminer l'observabilité des équations du coup de béliet avec l'inclusion de défauts de ce type, nous nous baserons sur les modèles en dimension finie affectés pour chaque défaut.

### 4.5 Surveillance à partir du modèle en différences finie

On rappelle les techniques de détection et localisation de fuites développées principalement dans les travaux [97, 98], qui sont basées sur des observateurs non linéaires. Le schéma de la figure 4.7 montre une canalisation avec une seule fuite. Dans cette figure, on peut voir qu'à cause de la présence d'une fuite, la canalisation est divisée en deux sections. Alors, pour la conception d'un observateur, on a besoin d'un modèle en dimension finie qui représente au moins ces deux sections. Considérons éventuellement une canalisation où les conditions aux limites sont les pressions à l'amont et à l'aval,  $H_{in}$  et  $H_{out}$ . Considérons de plus, la disponibilité des mesures des débits aux extrêmes,  $Q_{in}$  et  $Q_{out}$ . Le modèle suivant, remplit ces conditions :

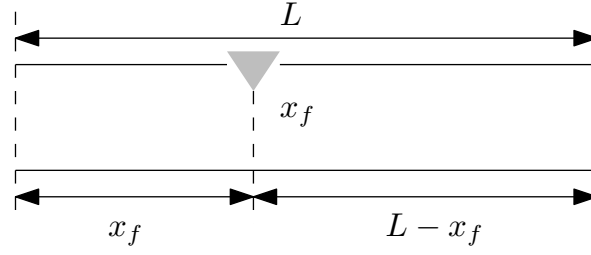


FIGURE 4.7 – Canalisation avec une fuite

$$\begin{aligned}
 \dot{Q}_1 &= -\mu Q_1 |Q_1| + \frac{a_1}{x_f} (H_{in} - H_2) \\
 \dot{H}_2 &= \frac{a_2}{x_f} (Q_1 - Q_2 - F \sqrt{H_2}) \\
 \dot{Q}_2 &= -\mu Q_2 |Q_2| + \frac{a_1}{L - x_f} (H_2 - H_{out})
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

avec :  $a_1 = -gA$ ,  $a_2 = -\frac{c^2}{gA}$  et  $\mu = \frac{f}{2DA} = fa_3$ .

Le modèle (4.37) est obtenu par la méthode de différences finies à partir des équations de la table 4.2 avec  $n = 2$ . La position de la fuite  $x_f$  avec un coefficient de fuite  $F$  est donné par la taille de la section  $x_f$  (strictement comprise entre 0 et  $L$ ).

#### 4.5.1 Estimation de la position d'une seule fuite

Si on veut localiser une fuite (et non son coefficient), on peut ajouter un état au système (4.37), pour qu'il représente la dynamique de la position. En considérant que cette dynamique est constante, nous avons :

$$\dot{x}_f = 0$$

Par ailleurs, si on considère que le débit perdu à cause de la fuite est constant  $Q_f = 0$ , et que le débit perdu est donné par la relation  $Q_f = Q_1 - Q_2$ , on peut déduire que :

$$\dot{H}_2 = 0$$

Sous ces suppositions, le système (4.37) devient :

$$\begin{aligned}
 \dot{Q}_1 &= -\mu Q_1 |Q_1| + \frac{a_1}{x_f} (H_{in} - H_2) \\
 \dot{H}_2 &= 0 \\
 \dot{Q}_2 &= -\mu Q_2 |Q_2| + \frac{a_1}{L - x_f} (H_2 - H_{out}) \\
 \dot{x}_f &= 0
 \end{aligned}$$

On peut voir ce système comme un système d'équations non linéaires avec deux variables

inconnues  $x_f$  et  $L - x_f$  :

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 + \mu y_1 |y_1| &= a_1 u_1 \xi_1 - a_1 \xi_2 \\ \dot{y}_1 + \mu y_2 |y_2| &= a_1 \left( \frac{\xi_2}{\xi_1 L - 1} \right) - a_1 \left( \frac{u_2 \xi_1}{\xi_1 L - 1} \right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

avec  $y_1 = Q_{in}$ ,  $y_2 = Q_{out} = Q_2$ ,  $u_1 = H_{in}$ ,  $u_2 = H_{out}$ ,  $\xi_1 = \frac{1}{x_f}$  et  $\xi_2 = \frac{H_2}{x_f}$ .

La position d'une fuite s'obtient formellement avec l'équation suivante :

$$\Delta x_f = \frac{\dot{y}_2 L + \mu y_2 |y_2| L + a_1 (u_2 - u_1)}{-\dot{y}_1 - \mu y_1 |y_1| + \dot{y}_2 + \mu y_2 |y_2|} \quad (4.39)$$

Quand les débits sont constants, cette équation est appelée "Calcul de la position équivalente" dans [107].

#### 4.5.2 Estimation de la position et taille d'une seule fuite et un coefficient de friction unique

Le but est de construire un observateur à partir du système (4.37) afin d'estimer la position de la fuite donnée par la taille de la section  $x_f$ , sa taille  $F_f$  et le coefficient de friction  $f$ .

L'estimation de la position de la fuite,  $x_f$ , peut être perçue comme le déplacement spatial de cette section vers la position de la fuite. Ce déplacement peut s'obtenir si  $x_f$  a un degré de liberté pour se déplacer. Le degré de liberté est donné par la relation  $L - x_f$ , qui est la taille de la deuxième section (voir la figure 4.7).

Comme dans le cas précédant, on considère les dynamiques des paramètres à estimer constantes, le système (4.37) doit maintenant contenir les nouveaux états :

$$\begin{aligned} \dot{x}_f &= 0 \\ \dot{F}_f &= 0 \\ \dot{f} &= 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Le système (4.37), avec les états additionnels, devient un modèle étendu avec un vecteur d'états,  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6] = [Q_1, H_2, Q_2, \Delta x_f, \sigma_f, f]^T$ , un vecteur d'entrées  $u = [u_1, u_2] = [H_{in}, H_{out}]$  et un vecteur de sorties,  $y = [y_1, y_2] = [Q_1, Q_2]$ .

On propose le changement de coordonnées suivant :

$$\Phi(x) : x \rightarrow \xi = [x_1, x_6, \frac{1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_5 \sqrt{x_2}}{x_4^2}, x_3] \quad (4.41)$$

qui est inversible dans les conditions de fonctionnement réalistes (où  $H_2 \neq 0$ ) et en présence

d'une fuite  $x_f$ .

En prenant le système (4.37) avec les états additionnels (4.40) et le changement de coordonnées (4.41), on obtient alors le système suivant :

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_1 &= -a_3 y_1 |y_1| \xi_2 + a_1 u_1 \xi_3 - a_1 \xi_4 \\
 \dot{\xi}_2 &= 0 \\
 \dot{\xi}_3 &= 0 \\
 \dot{\xi}_4 &= -2a_2 \xi_5 + \xi_3^2 (y_1 - y_2) \\
 \dot{\xi}_5 &= \frac{a_2}{2} \frac{\xi_3^2 \xi_5}{\xi_4} (y_1 - y_2) - \frac{a_2}{2} \frac{\xi_5^2}{\xi_4} \\
 \dot{\xi}_6 &= -a_3 y_2 |y_2| \xi_2 + \frac{a_1 \xi_4}{\xi_3 L - 1} - \frac{a_1 u_2 \xi_3}{\xi_3 L - 1} \\
 y_1 &= \xi_1 \\
 y_2 &= \xi_6
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi} &= A(u, y)\xi + \psi(\xi, u) \\
 y &= C\xi
 \end{aligned}$$

avec les matrices :

$$A(u, y) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 y_1 |y_1| & a_1 u_1 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi(\xi, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi_3^2 (y_1 - y_2) \\ \frac{a_2}{2} \frac{\xi_3^2 \xi_5}{\xi_4} (y_1 - y_2) - \frac{a_2}{2} \frac{\xi_5^2}{\xi_4} \\ -a_3 y_2 |y_2| \xi_2 + \frac{a_1 \xi_4}{\xi_3 L - 1} - \frac{a_1 u_2 \xi_3}{\xi_3 L - 1} \end{pmatrix}$$

et

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on peut voir que le système (4.42) avec le changement de coordonnées (4.40) est sous la forme triangulaire. Dans le chapitre 1 on a rappelé comment construire un observateur à convergence exponentiel pour ce système, théorème 1.3, à condition que l'entrée soit persistante, définition 1.7, contrairement à la technique précédente où la position pouvait se calculer avec des entrées qui pouvaient être constantes.

Les deux méthodologies présentées dans ce paragraphe pour la détection et localisation d'une fuite seront le point de départ pour les techniques de détection et localisation d'une obstruction à partir d'un modèle en différences finies proposées dans le chapitre 6.

## 4.6 Surveillance à partir du modèle fréquentiel

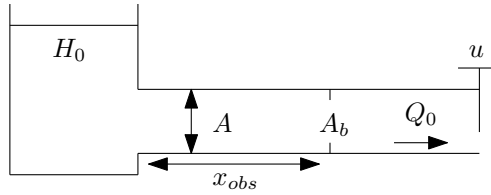


FIGURE 4.8 – Croquis des éléments pour la détection d'une obstruction ponctuelle

Dans ce paragraphe est rappelée la procédure de détection d'obstruction développée dans [69].

La technique consiste à utiliser une vanne à l'aval, qui décharge à pression atmosphérique, pour imposer des régimes oscillatoires permanents à différentes fréquences. À l'amont on considère qu'il y a un réservoir qui garantit une pression constante. La disposition des éléments est illustrée dans la figure 4.8.

En utilisant plusieurs fréquences,  $\omega \in (0, \omega_{max}]$ , on va pouvoir obtenir la réponse fréquentielle de la pression, PFR (*Pressure Frequency Response* [28]), juste avant la vanne. En interpolant les pics maximaux de pression du PFR, par exemple par une interpolation cubique, on obtient une nouvelle courbe, nommée PPFR (*Peak Pressure Frequency Response* [28]). La PFR et la PPFR sont illustrées dans la figure 4.9, en bleu et rouge respectivement. Grâce à la forme de la PPFR on détermine la position de l'obstruction.

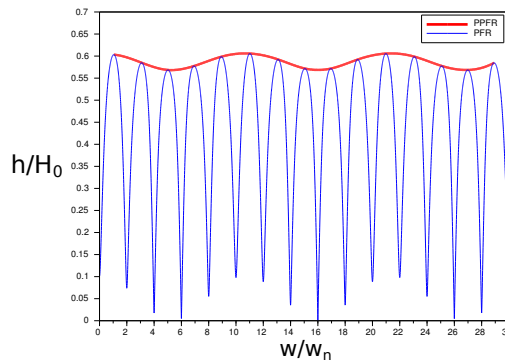


FIGURE 4.9 – Réponse fréquentiel de la pression et sa PPFR avant la vanne

Pour pouvoir obtenir la PFR il faut trouver la fonction de transfert  $U$  entre l'ouverture de la vanne et la pression juste avant elle, et pour cela on utilise les matrices de transfert et

de raccordement de la section précédente. Donc à partir du schéma 4.10, on doit utiliser deux matrices de transfères, équation (4.22), pour des canalisations de longueur  $x_D$  et une autre de longueur  $L - x_D$ , puis une matrice de raccordement pour le défaut situé à  $x = x_D$ , équation (4.32) pour une obstruction et équation (4.36) pour une fuite, et une matrice de raccordement pour la vanne equation (4.32), située à  $x = L$ .

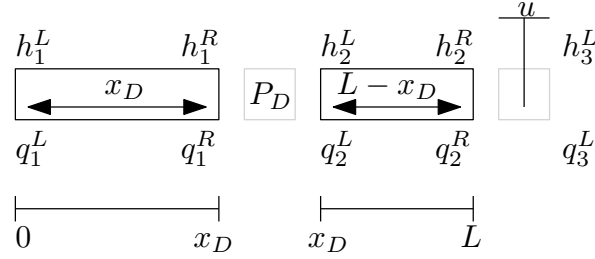


FIGURE 4.10 – Schéma pour la modélisation des éléments d'une obstruction ponctuelle

On obtient que :

$$\begin{Bmatrix} q_3^L \\ h_3^L \end{Bmatrix} = P_{ov1} P_{L-x} P_{obs} P_x \begin{Bmatrix} q_1^L \\ h_1^L \end{Bmatrix} + P_{ov2} u \quad (4.43)$$

$$\begin{Bmatrix} q_3^L \\ h_3^L \end{Bmatrix} = P_{ov1} \begin{Bmatrix} q_2^R \\ h_2^R \end{Bmatrix} + P_{ov2} u \quad (4.44)$$

avec les conditions de frontière  $h_1^L = 0$  et  $h_3^L = 0$ , les matrices

$$P_x = \begin{bmatrix} \cosh(\mu x_{obs}) & -\frac{1}{Z_c} \sinh(\mu x_{obs}) \\ -Z_c \sinh(\mu x_{obs}) & \cosh(\mu x_{obs}) \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

$$P_{L-x} = \begin{bmatrix} \cosh(\mu(L - x_{obs})) & -\frac{1}{Z_c} \sinh(\mu(L - x_{obs})) \\ -Z_c \sinh(\mu(L - x_{obs})) & \cosh(\mu(L - x_{obs})) \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$$P_{obs} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2\Delta H_0}{Q_0} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$P_{ov1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{Q_0}{(CdU_0)^2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{ov2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{Q_0^2}{(CdU_0)^2 U_0 g} \end{bmatrix}$$

les paramètres  $\mu$  et  $Z_c$  sont définis par les equations (4.17) et (4.21) et la taille de l'obstruction définie par  $\Delta H_0$ .

Le système d'équations (4.43)-(4.44) est composé de quatre équations complexes et quatre variables complexes inconnues ( $q_1^L, q_2^R, q_3^L$  et  $h_2^R$ ). Comme les matrices ( $P_v, P_{L-x}, P_{obs}$  et  $P_x$ ) sont inversibles le problème a une solution unique.

En guise d'illustration de la méthode, des simulations sont présentées ci-après, avec les données de [70] résumées dans le tableau 4.3.

Paramètres	Valeurs
$L$	1600
$c$	1200
$D$	0.3046
$f$	0
$A/A_b$	0.5
$H_{in}^0$	50
$H_{out}^0$	50
$Q^0$	0.1

TABLE 4.3 – Données d'une canalisation avec une obstruction ([70])

On construit la réponse fréquentielle de la pression  $h_4^L$  pour  $\omega \in (0 - \omega_{max}]$  et différentes positions d'une obstruction, puis en interpolant les pics d'amplitude maximale, on obtient la PPFR pour chaque position. Elles sont montrées dans la figure 4.11. La pression et la fréquence sont normalisées par  $h_r = h/H_0$  et  $\omega_r = \omega/\omega_0$

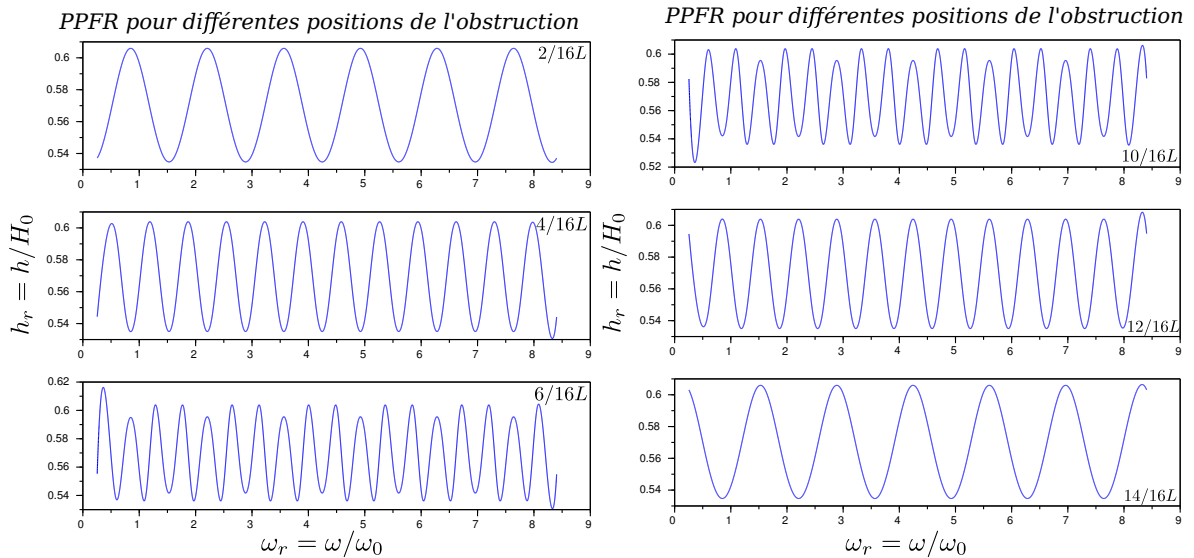


FIGURE 4.11 – PPFR à l'amont de la vanne pour différentes positions d'une obstruction

À partir de la PPFR, on peut savoir la position de l'obstruction en suivant la procédure suivante [28] :

- 1) Obtenir la PPFR dans un rang de fréquences  $(0 - \omega_{max}]$  et compter le nombre de pics ( $N$ )
- 2) La position de l'obstruction est donnée par :

$$\frac{x_{obs}}{L} = \frac{2N}{\omega_{max}} \quad (4.48)$$

si la PPFR commence par un pique, ou

$$1 - \frac{x_{obs}}{L} = \frac{2N}{\omega_{max}} \quad (4.49)$$

si elle commence par un creux.

Pour savoir la taille de l'obstruction il faut en premier faire une courbe montrant comment change la ratio entre les pics et les creux avec les différentes tailles d'obstruction de la PPFR pour un débit  $Q_0$  donné. Une fois la courbe obtenue avec le ratio mesuré on trouve l'amplitude de l'obstruction. On peut noter que plus l'obstruction s'approche du milieu de la canalisation  $x_{obs} \rightarrow \frac{L}{2}$  plus l'analyse des courbes devient difficile, car le ratio tend vers zero.

Pour détecter et localiser une fuite, une méthode très similaire est proposée dans [28]. On ne la rappellera pas dans ce manuscrit, mais dans le chapitre 6 on propose une nouvelle méthodologie pour la détection et localisation de fuite et obstruction, avec la possibilité d'incorporer un coefficient de frottement différent de zero et aussi une robustesse a du bruit additif dans les variables mesurées.

## 4.7 Conclusions

Ce chapitre a été dédié au rappel des techniques de modélisation des équations du coup de bélier et des technique de surveillance de défaut dans une canalisation déjà disponibles dans la littérature.

Principalement deux modèles ont été décrits, un modèle linéaire fréquentiel basé sur le régime oscillatoire persistant et un modèle en différences finie.

Chaque modèle est utilisé pour développer une méthodologie de détection et localisation.

Dans la suite, on se basera sur ces concepts pour améliorer et concevoir de nouveaux modèles et nouvelles techniques de surveillance de canalisation.





# Contributions à la modélisation d'une canalisation avec défauts

---

## Sommaire

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>75</b>
<b>5.2</b>	<b>Modèle en différence finies avec instrumentation</b>	<b>76</b>
<b>5.3</b>	<b>Modèle en différences finies avec obstruction</b>	<b>78</b>
5.3.1	Obstruction ponctuelle	78
5.3.2	Obstruction étendue	79
<b>5.4</b>	<b>Analyse de sensibilité</b>	<b>80</b>
<b>5.5</b>	<b>Modélisation par différences finies implicites</b>	<b>81</b>
5.5.1	Pipeline	82
5.5.2	Fuite	83
5.5.3	Obstruction ponctuelle	83
5.5.4	Obstruction étendue	84
5.5.5	Conditions limites	85
5.5.6	Conditions initiales	86
5.5.7	Validation fréquentielle avec obstruction	86
<b>5.6</b>	<b>Conclusions</b>	<b>88</b>

---

## 5.1 Introduction

Sur la base des rappels du chapitre précédent autour des modèles de pipelines, nous proposons ici des études de modélisation complémentaires, en vue de proposer ensuite de nouvelles méthodes de surveillance.

Ces études d'une part combinent les ingrédients de base précédemment vus pour mettre en évidence des modèles plus complets, et d'autre part en soulignent certaines limites pour leur utilisation en détection de défauts par analyse de sensibilité.

Plus précisément, le modèle de différences finies le plus classiquement utilisé pour la détection et localisation de fuites ([106, 107, 108]) est tout d'abord complété par la prise en compte de l'instrumentation du pipeline (ouvrages à chaque extrémité) – en général ignorée

dans ce contexte, puis par la prise en compte de défauts de type obstruction, également non considérés avec cette forme de modèle dans les travaux précédents.

Une étude de sensibilité par rapport aux défauts à détecter avec ce type de modèle, et en ne considérant que des mesures à chaque extrémité du pipeline, est ensuite proposée, soulignant que, autant une fuite est effectivement bien détectable dans ce cadre (voir [104]), autant une obstruction l'est beaucoup moins.

En conséquence, un modèle par différences finies implicites est alors introduit pour garantir une meilleure reproduction de l'effet d'une obstruction, validé par comparaison avec le modèle fréquentiel.

## 5.2 Modèle en différence finies avec instrumentation

Dans ce paragraphe, en rappelant que les travaux précédents sur la détection et la localisation de fuites à base de modèle en différences finies n'ont à notre connaissance pas tenu compte de l'instrumentation du problème, nous commencerons par étudier la combinaison de ce type de modèle avec une pompe à l'amont et une résistance à l'aval, comme illustré dans la figure 5.1.

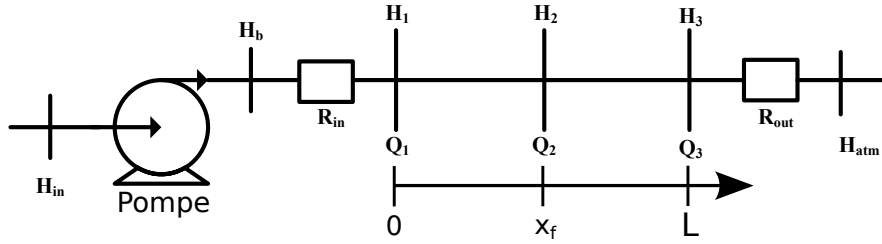


FIGURE 5.1 – Schéma du système avec discrétisation spatiale de la canalisation

L'idée avant tout est que pour représenter une fuite entre les deux extrémités  $x = 0$  et  $x = L$ , le modèle le plus simple est à deux sections, soit, en se référant au tableau 4.2 et à la prise en compte de la fuite comme en section 4.3.2 du chapitre précédent, un modèle à 4 états comme suit :

$$\begin{aligned}
 \dot{H}_1 &= \frac{a_2}{x_f}(Q_{in} - Q_2) \\
 \dot{Q}_2 &= -\mu Q_2 |Q_2| + \frac{a_1}{x_f}(H_{in} - H_2) \\
 \dot{H}_2 &= \frac{a_2}{\Delta x_f}(Q_1 - Q_2 - F\sqrt{H_2}) \\
 \dot{Q}_3 &= -\mu Q_3 |Q_3| + \frac{a_1}{L - \Delta x_f}(H_2 - H_{out})
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

où l'indice  $i$  indique les variables associés à la section  $i$  de la canalisation, et  $Q_1 = Q_{in}$ ,

$H_3 = H_{out}$  sont considérées comme condition limites.

Afin de mieux considérer le comportement d'un système réel [79], l'équation d'une pompe et les équations de deux restrictions peuvent être ajoutées (selon la représentation pompe-tuyau-restriction de la figure 5.1), ce qui permet de simuler les pertes de pression provoquées par des accessoires.

En considérant les équations d'une pompe centrifuge et d'une restriction hydraulique (voir tableau 4.1), d'une part, la pression  $H_n$  change en fonction de la restriction de sortie  $R_{out}$  comme :

$$H_n = H_{atm} - R_{out}Q_n^2 \quad (5.2)$$

avec  $H_{atm}$  la pression atmosphérique, et d'autre part, le débit d'entrée  $Q_1$  peut s'écrire à partir de l'équation de la pompe de la résistance d'entrée  $R_{in}$  comme :

$$Q_1 = \frac{-C_1 + \sqrt{C_1^2 - 4(R_{in} + C_0)(-C_2 + H_1 - H_{in})}}{2(R_{in} + C_0)} \quad (5.3)$$

avec  $C_0$ ,  $C_1$  et  $C_2$  les paramètres de la pompe.

En vue de sa validation, ce modèle a alors été mis en place dans un simulateur Matlab©, et ses résultats comparés avec des données correspondant à un vrai prototype de 85 mètres de long du centre de recherche mexicain CINVSTAV-GDL [8], dont les paramètres sont donnés par le tableau 5.1.

$g \text{ (m/s}^2\text{)}$	$c \text{ (m/s)}$	$A \text{ (m}^2\text{)}$	$f \text{ (s}^{-2}\text{)}$	$L \text{ (m)}$
9.81	373	0.003	0.0223	85

TABLE 5.1 – Paramètres du prototype de canalisation considéré [8].

Ces données correspondent à l'apparition de trois fuites consécutives (au temps  $t = 100, 400, 700s$  respectivement) sur le prototype.

Les coefficients de la pompe centrifuge ont été réglés à  $C_0 = 27.27$ ,  $C_1 = -274$  et  $C_2 = -415860$ , obtenu par ajustement de courbe (*curve fitting*) à partir de la courbe expérimentale de la pompe.

Le comportement obtenu à partir du modèle proposé est illustré dans la figure 5.2, où les variables d'entrée et de sortie du modèle de la canalisation peuvent être comparées avec les données réelles enregistrées sur le prototype.

Cette figure montre simultanément les données de simulation  $H_{in}$ ,  $H_{out}$ ,  $Q_{in}$  et  $Q_{out}$  et les mesures obtenues du prototype  $h_{in}$ ,  $h_{out}$ ,  $q_{in}$  et  $q_{out}$ .

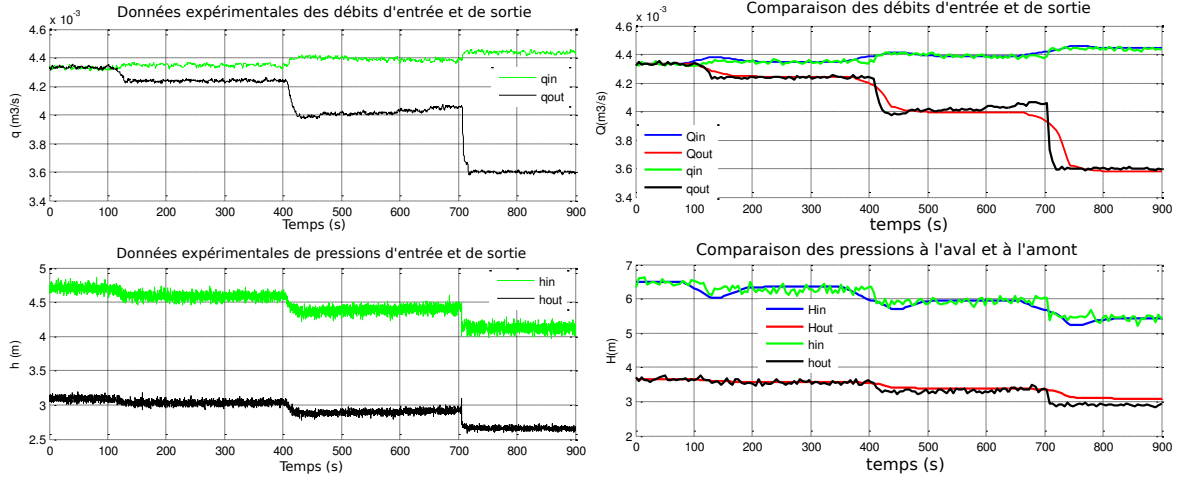


FIGURE 5.2 – Données réelles comparées aux résultats de simulation

L'addition d'une pompe et d'une restriction hydraulique permettent de simuler une perte de pression produite par des accessoires (vannes, coudes, etc). On peut voir que les deux flux  $Q_{in}$  et  $Q_{out}$  changent au cours de la simulation, comme ils le font dans le système réel. Il y a aussi une diminution de  $H_{in}$  à la suite de chaque fuite.

L'ajout d'une restriction hydraulique aux deux extrémités de la canalisation permet au modèle de simuler une variation de  $Q$  et  $H$  à l'entrée et la sortie de la canalisation quand une fuite apparaît, encore en concordance avec les dynamiques réelles du système.

On peut souligner qu'une partie de ces comportements ne peut pas être reproduite par le modèle lorsque les modèles de la pompe ou des restrictions sont omises (modèle présenté dans le chapitre 4 et dans [47]).

### 5.3 Modèle en différences finies avec obstruction

Dans cette section, nous mettons en évidence la prise en compte d'obstructions dans une modélisation par différences finies, à partir des rappels du chapitre 4, en vue de leur détection et localisation (comme déjà fait pour les fuites).

#### 5.3.1 Obstruction ponctuelle

Pour le cas d'une obstruction ponctuelle à prendre en compte dans un modèle par différences finies, si l'obstruction se présente entre les points  $x_i$  et  $x_{i+1}$ , l'équation (4.10) devient comme on l'a vu :

$$H_i^- = H_i - \frac{Q_i^2}{2gA^2} \left[ 1 - \left( \frac{A^2}{A_i} \right)^2 \right] \quad (5.4)$$

avec  $A_i$  l'aire de l'obstruction. Donc, à chaque occurrence d'une obstruction, la relation des pressions entre les deux sections

$$\frac{\Delta H_i}{\Delta x_i} = \frac{H_i - H_{i+1}}{\Delta x_i}$$

doit être remplacée par

$$\frac{\Delta H_i}{\Delta x_i} = \frac{H_i^- - H_{i+1}}{\Delta x_i}$$

dans le modèle à différences finies.

### 5.3.2 Obstruction étendue

La modélisation d'une obstruction peut être étendue au cas d'une obstruction qui s'étale sur une longueur  $l_0$  dans le pipeline, comme illustré par la figure 5.3. Dans ce cas on parlera d'une *obstruction étendue*.

Pour la modéliser on doit considérer le changement d'aire au début (contraction de l'aire de  $A$  à  $A_0$ ) et à la fin de l'obstruction (expansion de l'aire de  $A_0$  à  $A$ ), puis le segment obstrué de longueur  $l_0$ . Les équations suivantes doivent alors être couplées au modèles du reste de la canalisation :

$$\begin{aligned} \dot{H}_o &= -\frac{c^2}{gA_o} \frac{Q_{o+1} - Q_o}{l_o} \\ \dot{Q}_{o+1} &= -A_o g \frac{H_{o+1} - H_o^-}{l_o} - \frac{f_{o+1} Q_{o+1} |Q_{o+1}|}{2DA_o} \\ \dot{H}_{o+1} &= -\frac{c^2}{gA} \frac{Q_{o+2} - Q_{o+1}}{x_{o+2} - x_{o+1}} \\ \dot{Q}_{o+2} &= -Ag \frac{H_{o+2} - H_{o+1}^-}{x_{o+2} - x_{o+1}} - \frac{f_{o+2} Q_{o+2} |Q_{o+2}|}{2DA} \end{aligned} \quad (5.5)$$

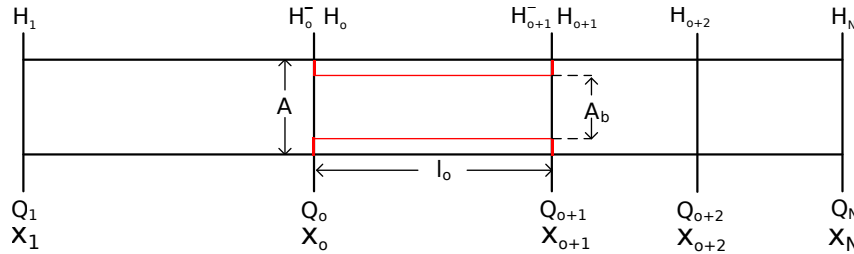


FIGURE 5.3 – Canalisation avec une obstruction étendue sur une longueur  $l_0$

Les pressions juste avant le commencement et à la fin de l'obstruction,  $H_o^-$  et  $H_{o+1}^-$ , sont modifiées en utilisant l'équation de Bernoulli pour représenter les effets du changement d'aire

transversale de la section de la canalisation.

$$H_o^- = H_o - \frac{Q_o^2}{2gA^2} \left[ \left( \frac{A}{A_b} \right)^2 - 1 \right] \quad (5.6)$$

$$H_{o+1}^- = H_{o+1} - \frac{Q_{o+1}^2}{2gA_b^2} \left[ \left( \frac{A_b}{A} \right)^2 - 1 \right] \quad (5.7)$$

## 5.4 Analyse de sensibilité

Dans cette partie, on s'intéresse à analyser la sensibilité des différentes sorties de mesure possibles (pression ou débit à chaque extrémité) à l'effet d'une obstruction avec la modélisation présentée ci-avant.

Afin de quantifier les effets des différentes positions de l'obstruction notamment la sensibilité  $S_x^y$  d'une sortie  $y$  relative à la position  $x$  est introduite comme la variation de l'énergie  $E_y$  de cette sortie par rapport à la position  $x$  :

$$S_x^y = \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^T y(x)^2 dt \right) \quad (5.8)$$

Clairement, plus cette fonction est grande, plus facile est la distinction de deux endroits différents à partir de cette sortie. Cette analyse de sensibilité est comparable à une analyse d'identifiabilité paramétrique (voir [33]).

Pour faire cette analyse, les 2 modèles présentés précédemment ont été simulés avec les données de canalisation du tableau 5.1, et les mêmes entrées, pour différents choix de ces entrées et différents nombres de sections. Les résultats sont toujours de même nature, résumés par le tableau 5.2, établis avec  $H_{in} = 1 + 0.5 \sin(2\pi ft)$ , fréquences  $f = 1$ ,  $f = 0.5$ ,  $H_{out} = 1$ , nombre de sections  $N = 10$ ,  $N = 85$  et  $T = 2s$  dans 5.8. Dans ce tableau les 4 sorties possibles  $H_1$ ,  $H_N$ ,  $Q_1$ ,  $Q_N$  sont désignées par  $H_{in}$ ,  $H_{out}$ ,  $Q_{in}$ ,  $Q_{out}$  et les valeurs numériques données sont les moyennes des valeurs absolues des fonctions de sensibilités évalués pour les 83 positions intérieures possibles de l'obstruction.

Pour bien comprendre cette table, les valeurs des pressions  $H_1$  et  $H_N$  oscillent entre 6.5 (m) et 3.5 (m) et les débits autour de  $4.3 \cdot 10^{-3}$  ( $m^3/s$ ). Le modèle avec l'obstruction ponctuelle résulte avoir une sensibilité plus faible que l'autre modèle. La meilleure paire de mesures avec la plus grande sensibilité est  $(H_{in}, Q_{out})$ , mais c'est encore très faible car si on ajoute un bruit blanc gaussien autour de 1% aux les sorties alors deux positions différentes deviennent indiscernables.

Dans tous les cas les valeurs de sensibilité trouvées sont vraiment faibles et distinguer entre deux différentes positions est très difficile, ce qui rend le problème d'observation peu aisé.

Pour pallier à ce problème on propose ci-après une méthode plus précise de discrétisation

Sortie	Obstruction ponctuelle	Obstruction étendue	N	f
$H_{in}$	$8.99 \cdot 10^{-05}$	$1.51 \cdot 10^{-04}$	10	1
$H_{out}$	$1.08 \cdot 10^{-05}$	$1.58 \cdot 10^{-05}$	10	1
$Q_{in}$	$3.85 \cdot 10^{-12}$	$3.86 \cdot 10^{-12}$	10	1
$Q_{out}$	$1.04 \cdot 10^{-11}$	$1.0138 \cdot 10^{-11}$	10	1
$H_{in}$	$2.31 \cdot 10^{-05}$	$1.43 \cdot 10^{-04}$	85	1
$H_{out}$	$8.27 \cdot 10^{-07}$	$1.35 \cdot 10^{-05}$	85	1
$Q_{in}$	$8.52 \cdot 10^{-12}$	$9.46 \cdot 10^{-12}$	85	1
$Q_{out}$	$1.31 \cdot 10^{-12}$	$2.33 \cdot 10^{-11}$	85	1
$H_{in}$	$2.07 \cdot 10^{-04}$	$2.44 \cdot 10^{-04}$	10	0.5
$H_{out}$	$4.5 \cdot 10^{-06}$	$1.92 \cdot 10^{-05}$	10	0.5
$Q_{in}$	$2.15 \cdot 10^{-12}$	$2.2 \cdot 10^{-12}$	10	0.5
$Q_{out}$	$3.75 \cdot 10^{-12}$	$8.39 \cdot 10^{-11}$	10	0.5
$H_{in}$	$2.57 \cdot 10^{-05}$	$1.79 \cdot 10^{-07}$	85	0.5
$H_{out}$	$5.34 \cdot 10^{-07}$	$5.3 \cdot 10^{-06}$	85	0.5
$Q_{in}$	$2.3 \cdot 10^{-13}$	$3.19 \cdot 10^{-13}$	85	0.5
$Q_{out}$	$4.3 \cdot 10^{-13}$	$4.1 \cdot 10^{-13}$	85	0.5

TABLE 5.2 – Moyenne de la variation de l'énergie pour chaque sortie de chaque modèle

des équations aux dérivées partielles, avec le but d'augmenter la discernabilité entre deux positions d'obstruction différentes, et pouvoir en suite implémenter une technique de détection et localisation d'obstruction.

## 5.5 Modélisation par différences finies implicites

On considère ici un système composé d'un grand réservoir à l'extrémité amont de la canalisation et une vanne à l'extrémité aval avec décharge dans l'atmosphère, comme le système de la figure 5.4 ( qui est le même que celui du chapitre 4).

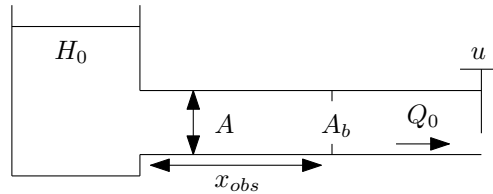


FIGURE 5.4 – Croquis des éléments pour la détection d'une obstruction ponctuelle

Le réservoir à l'extrémité amont ( $x = 0$ ) garantit une pression constante  $H_{in} = H_{res}$ , tandis que la vanne en aval ( $x = L$ ) suit la relation suivante [28, 9] :

$$Q_t = \frac{Q_s u}{\sqrt{H_s}} \sqrt{H_t} \quad (5.9)$$



avec  $H_s, Q_s$  et  $H_t, Q_t$  les pressions et débit à l'amont de la vanne pour l'état stationnaire et transitoire respectivement.  $u$  est défini comme :

$$u = \frac{C_d A_v}{(C_d A_v)_s} \quad (5.10)$$

où  $C_d$  est le coefficient de décharge et  $A_v$  est l'ouverture de la vanne. L'indice 's' indique les conditions pour l'état d'équilibre.

### 5.5.1 Pipeline

Pour obtenir une précision de second ordre dans la discrétisation spatiale et aussi pour faciliter la mise en œuvre correcte des conditions aux limites, une grille unidimensionnelle et décalée est utilisé comme dans [111], et comme illustrée dans la figure 5.5.

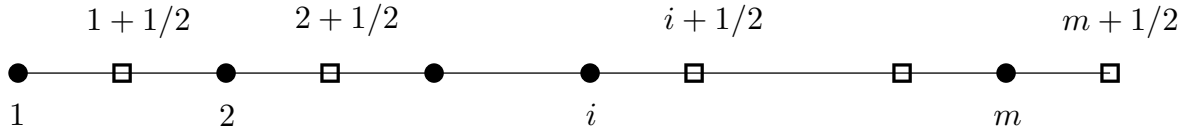


FIGURE 5.5 – Grille décalée, non-symétrique et unidimensionnelle

Avec une taille du maillage unidimensionnel constant  $\Delta x$ , on approxime le débit transitoire  $Q(t, x)$  par sa valeur en  $x_i = \Delta x \times (i - 1)$  et la pression transitoire  $H(t, x)$  par celle en  $x_{i+1/2} = \Delta x \times (i - 1/2)$ , pour  $i = 1, 2, \dots, m$ . Par conséquent, la grille commence par le nœud qui définit le débit  $Q_1$  et se termine avec le nœud qui définit la pression  $H_{m+1/2}$ . D'après la définition de la grille, les  $\Delta x$  sont calculés comme  $\Delta x = L/(m - 1/2)$ .

Les équations du coup de béliet sont discrétisées dans l'espace avec la méthode des différences finies sur la grille décalée de la figure 5.5.

La forme en différences finies implicites de l'équation de conservation de la masse sur un point  $x_{i+1/2}$  avec  $i = 1, 2, \dots, m - 1$  et un pas de temps constant  $h$  est :

$$\frac{H_{i+1/2}^{n+1} - H_{i+1/2}^n}{h} + \frac{c^2}{gA} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}}{\Delta x} = 0 \quad (5.11)$$

avec :

- ★ l'indice  $i$  pour le nœud,
- ★ l'indice  $n$  pour le temps,

De manière similaire, l'équation de mouvement est discrétisée sur  $x_i$  comme :

$$\frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{h} + gA \frac{H_{i+1/2}^{n+1} - H_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{f}{2DA} |Q_i^{n+1}| Q_i^{n+1} = 0 \quad (5.12)$$

pour  $i = 2, 3, \dots, m$ .

On peut sur cette base présenter la prise en compte des conditions internes lors de l'apparition d'un défaut dans la canalisation.

### 5.5.2 Fuite

En considérant une fuite à la position d'in  $f + 1/2$  on obtient le schéma de la figure 5.6.

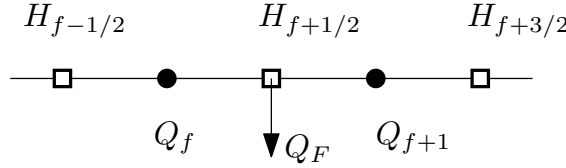


FIGURE 5.6 – Fuite avec un débit  $Q_F$  et à la position  $f + 1/2$  sur la grille non-uniforme

En combinant les équations (4.6) et (4.7) on obtient :

$$Q_{f+1} = Q_f - F\sqrt{H_{f+1/2}} \quad (5.13)$$

En incluant cette dernière équation dans l'équation de masse du nœud  $f + 1/2$ , on obtient :

$$\frac{H_{f+1/2}^{n+1} - H_{f+1/2}^n}{h} + \frac{c^2}{gA} \frac{Q_f^{n+1} - Q_{f+1}^{n+1} - F\sqrt{H_{f+1/2}^{n+1}}}{\Delta x} = 0 \quad (5.14)$$

### 5.5.3 Obstruction ponctuelle

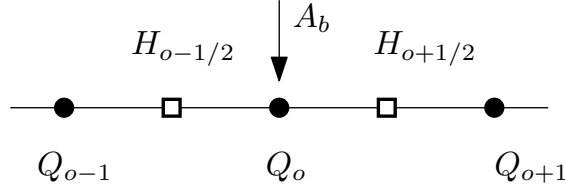
Pour modéliser une obstruction dans ce nouveau maillage, comme montré dans la figure 5.7, on se base sur l'équation (4.10), qui peut se ré-écrire comme :

$$H_{o+1/2} = H_{o-1/2} + \frac{1 - \left(\frac{A}{A_b}\right)^2}{2gA^2} Q_o^2 \quad (5.15)$$

où l'indice  $o$  indique le nœud où se produit l'obstruction et on désigne le coefficient de l'obstruction comme  $\Delta H_b = \frac{1 - \left(\frac{A}{A_b}\right)^2}{2gA^2}$ .

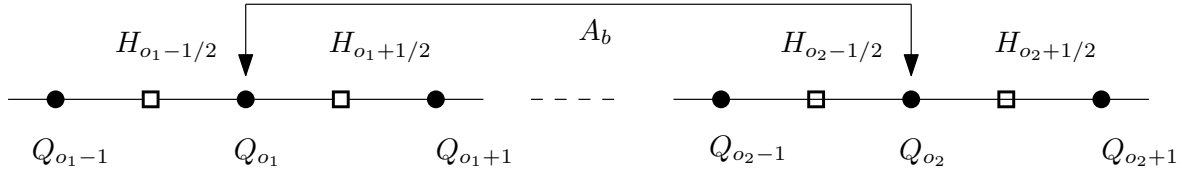
On peut finalement l'inclure dans le modèle aux différences finies, en modifiant l'équation du débit  $Q_o$  au nœud  $o$  comme :

$$\frac{Q_o^{n+1} - Q_o^n}{h} + gA \frac{H_{o+1/2}^{n+1} + \Delta H_b (Q_o^{n+1})^2 - H_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{f}{2DA} |Q_i^{n+1}| Q_o^{n+1} = 0$$

FIGURE 5.7 – Obstruction d'aire  $A_b$  et indice  $o$  sur une grille asymétrique

### 5.5.4 Obstruction étendue

Dans le cas d'une obstruction étendue, il faut considérer les effets au nœud  $o_1$  de début, et  $o_2$  de fin d'obstruction, comme sur la figure 5.8.

FIGURE 5.8 – Obstruction étendue d'aire  $A_b$  qui commence et finit aux nœuds  $o_1$  et  $o_2$ 

Pour le nœud  $o_1$  il y a une compression de l'aire de la canalisation, qui résulte en une perte de pression et peut se modéliser en utilisant Bernoulli comme :

$$H_{o1+1/2} = H_{o1-1/2} + \frac{1 - \left(\frac{A_b}{A}\right)^2}{2gA^2} Q_o^2 \quad (5.16)$$

Contrairement au nœud  $o_1$ , dans le nœud  $o_2$  il y a une extension de l'aire de la canalisation, et encore une fois en utilisant Bernoulli, on obtient :

$$H_{o2+1/2} = H_{o2-1/2} + \frac{1 - \left(\frac{A_b}{A}\right)^2}{2gA_b^2} Q_o^2 \quad (5.17)$$

Pour la partie de la canalisation comprise entre les nœuds  $o_1$  et  $o_2$ , qui est à aire transversale réduite  $A_b$ , l'équation de conservation de la masse devient :

$$\frac{H_{i+1/2}^{n+1} - H_{i+1/2}^n}{h} + \frac{c^2}{gA_b} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}}{\Delta x} = 0 \quad (5.18)$$

pour  $i = o_1, o_1 + 1, \dots, o_2 - 1$ , et l'équation de mouvement est :

$$\frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{h} + gA_b \frac{H_{i+1/2}^{n+1} - H_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{f}{2DA_b} |Q_i^{n+1}| Q_i^{n+1} = 0 \quad (5.19)$$

pour  $i = o_1 + 1, o_1 + 2, \dots, o_2$ .

## 5.5.5 Conditions limites

Le système doit être complété par des conditions aux limites appropriées. Celles-ci sont implémentées avec l'hypothèse suivante : comme en amont de la canalisation les pressions aux nœuds  $i = 1, 2$  ne sont pas définis, alors on considère en ces des pseudo-pressions  $\bar{H}_1, \bar{H}_2$  et au nœud  $i = 1 + 1/2$  le pseudo-débit  $\bar{Q}_{1+1/2}$ . On peut alors discrétiser l'équation de mouvement sur le nœud  $i = 1 + 1/2$  (voir la figure 5.9) en :

$$\frac{\bar{Q}_{i+1/2}^{n+1} - \bar{Q}_{i+1/2}^n}{h} + gA \frac{\bar{H}_2^{n+1} - \bar{H}_1^{n+1}}{\Delta x} + \frac{f}{2DA} |\bar{Q}_{1+1/2}^{n+1}| \bar{Q}_{1+1/2}^{n+1} = 0 \quad (5.20)$$

avec les pseudo-débits :

$$\bar{Q}_{1+1/2}^{n+1} = (Q_1^{n+1} + Q_2^{n+1})/2$$

$$\bar{Q}_{1+1/2}^n = (Q_1^n + Q_2^n)/2$$

et les pseudo-pressions :

$$\bar{H}_2^{n+1} = (H_{1+1/2}^{n+1} + H_{2+1/2}^{n+1})/2$$

$$\bar{H}_1^{n+1} = H_{in}$$

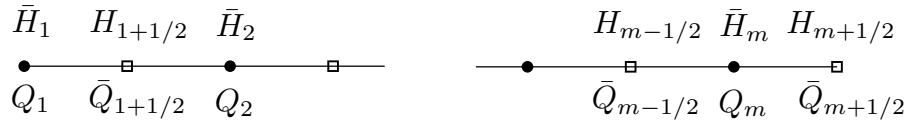


FIGURE 5.9 – Définition des pseudo-paramètres aux limites de la canalisation

En aval de la canalisation ( $x = L$ ), donc pour les nœuds  $m + 1/2$  et  $m - 1/2$ , les débits ne sont pas définis, et il faut comme précédemment définir les pseudo-débits  $\bar{Q}_{m+1/2}$  et  $\bar{Q}_{m-1/2}$  et au nœud  $m$  on définit la pseudo-pression  $\bar{H}_m$  (figure 5.9). On obtient pour l'équation en aval :

$$0 = \frac{\bar{H}_m^{n+1} - \bar{H}_m^n}{h} + \frac{c^2}{gA} \frac{\bar{Q}_{m+1/2}^{n+1} - \bar{Q}_{m-1/2}^{n+1}}{\Delta x}$$

avec les pseudo-pressions :

$$\bar{H}_m^{n+1} = (H_{m+1/2}^{n+1} + H_{m-1/2}^{n+1})/2$$

$$\bar{H}_m^n = (H_{m+1/2}^n + H_{m-1/2}^n)/2$$

et les pseudo-débits :

$$\bar{Q}_{m-1/2}^{n+1} = (Q_{m-1}^{n+1} + Q_m^{n+1})/2$$

$$\bar{Q}_{m+1/2}^n = \frac{Q_s u(t)}{\sqrt{H_s}} \sqrt{H_{m+1/2}^{n+1}}$$

### 5.5.6 Conditions initiales

Trouver des conditions initiales appropriées en sachant qu'il peut exister des défauts dans la canalisation n'est pas évident, et une méthode pour y arriver est de calculer les conditions dans un régime permanent, ce qui implique des conditions limites considérées constantes et des variations temporelles nulles ( $H_{i+1/2}^n = H_{i+1/2}^{n+1}$  et  $Q_i^n = Q_i^{n+1}$ ). Par exemple, dans le cas plus simple où aucun défaut n'est présent, en considérant toutes les conditions mentionnées, pour trouver les conditions initiales il faut résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{c^2}{gA} \frac{Q_{i+1}^0 - Q_i^0}{\Delta x} x & \forall i = 1, 3, \dots, m-1 \\ 0 &= gA \frac{H_{i+1/2}^0 - H_{i-1/2}^0}{\Delta x} + \frac{f}{2DA} |Q_i^0| Q_i^0 & \forall i = 2, 3, \dots, m. \end{aligned} \quad (5.21)$$

avec les condition limites pour l'amont :

$$\begin{aligned} 0 &= gA \frac{\bar{H}_2^0 - \bar{H}_1^0}{\Delta x} + \frac{f}{2DA} |\bar{Q}_{1+1/2}^0| \bar{Q}_{1+1/2}^0 \\ \bar{H}_2^0 &= (H_{1+1/2}^0 + H_{2+1/2}^0)/2 \\ \bar{H}_1^0 &= H_{in} \\ \bar{Q}_{1+1/2}^0 &= (Q_1^0 + Q_2^0)/2 \end{aligned} \quad (5.22)$$

et les conditions limites pour l'aval :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{c^2}{gA} \frac{\bar{Q}_{m+1/2}^0 - \bar{Q}_{m-1/2}^0}{\Delta x} \\ \bar{Q}_{m-1/2}^0 &= (Q_{m-1}^0 + Q_m^0)/2 \\ \bar{Q}_{m+1/2}^0 &= \frac{Q_s u(0)}{\sqrt{H_s}} \sqrt{H_{m+1/2}^0} \end{aligned} \quad (5.23)$$

### 5.5.7 Validation fréquentielle avec obstruction

Pour valider la nouvelle modélisation d'une canalisation avec une obstruction, précédemment, nous n'avons pas pu disposer de données expérimentales. À la place, on propose une méthodologie numérique basée sur le comportement fréquentiel d'un système (*diagramme de Bode*). On utilise le modèle du chapitre 5, illustré dans la figure 4.10 et décrit par les équations (4.43) et (4.44). Ce modèle, en l'absence de frottement (cas linéaire) donne la solution exacte. En présence de frottement, sa linéarisation peut être considérée comme une bonne référence quand l'excitation est sous forme sinusoïdale. On se propose donc comparer le diagramme de Bode du modèle en différences finies implicites avec celui du modèle fréquentiel linéarisé.

Pour cela, prenons les variables pressions et débit, comme variable d'états ( $x =$

$[Q_i, H_{i+1/2}]^T$ ), l'ouverture de la vanne comme variable d'entrée ( $u$ ) et comme variable de sortie la pression à l'amont de la vanne. On obtient une fonction de la forme :

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}, x_n, u_n) &= 0 \\ y_n &= Cx_n \end{aligned} \quad (5.24)$$

avec  $n$  l'indice temporel, et utilisant un développement à l'ordre autour d'un point d'équilibre  $(x_0, u_0)$ , qui correspond au point de fonctionnement stationnaire ( $x_{n+1} = x_n$ ) quand l'obstruction est présente dans la canalisation, et la vanne à une ouverture constante correspondant à la valeur moyenne d'oscillation, on obtient :

$$0 = f(x_0, x_0, u_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \right|_{(x_0, x_0, u_0)} (x_{n+1} - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{(x_0, x_0, u_0)} (x_n - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial u_n} \right|_{(x_0, x_0, u_0)} (u - u_0)$$

par l'équation (5.24)  $f(x_0, x_0, u_0) = 0$ , et en désignant  $\Delta x_{n+1} = x_{n+1} - x_0$ ,  $\Delta x_n = x_n - x_0$ ,  $\Delta u_n = u_n - u_0$  et en réorganisant les termes, on obtient un système linéarisé de la forme :

$$\begin{aligned} \Delta x_{n+1} &= A\Delta x_n + B\Delta u_n \\ y_n &= C\Delta x_n \end{aligned} \quad (5.25)$$

avec les matrices :

$$\begin{aligned} A &= \left( \left. \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \right|_{(x_0, x_0, u_0)} \right)^{-1} \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{(x_0, x_0, u_0)} \\ B &= \left( \left. \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \right|_{(x_0, x_0, u_0)} \right)^{-1} \left. \frac{\partial f}{\partial u_n} \right|_{(x_0, x_0, u_0)} \end{aligned}$$

*Remarque* : Le point d'équilibre doit être choisi tel que la matrice  $\left. \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \right|_{(x_0, x_0, u_0)}$  soit inversible.

Une fois le système linéarisé, on calcule le diagramme de Bode correspondant en utilisant les paramètres de la table 4.3 avec un nombre de nœuds  $m = 256$ . Puis, avec la routine *gainplot* de Scilab [38] on obtient le Bode pour deux positions différentes d'obstruction ( $x_{obs} = 11/16L$  et  $x_{obs} = 15/16L$ ). Pour le modèle fréquentiel, le diagramme de Bode s'obtient en calculant l'amplitude relative de la pression à l'amont de la vanne par rapport à l'amplitude de l'ouverture de la vanne pour différentes fréquences (avec l'amplitude en décibels  $20 \log(\cdot)$ ). La figure 5.10 illustre les diagrammes de Bode en échelle logarithmique pour les deux positions différentes, la légende *FM* désigne le modèle fréquentiel et *D<sub>2</sub>* désigne le modèle discrétisé avec une grille asymétrique. On peut voir l'erreur entre les modèles dans la figure 5.11, et en considérant comme acceptable une erreur inférieure à  $0.1dB$  alors on peut définir la région de validité du modèle entre 0 et  $0.35Hz$ .

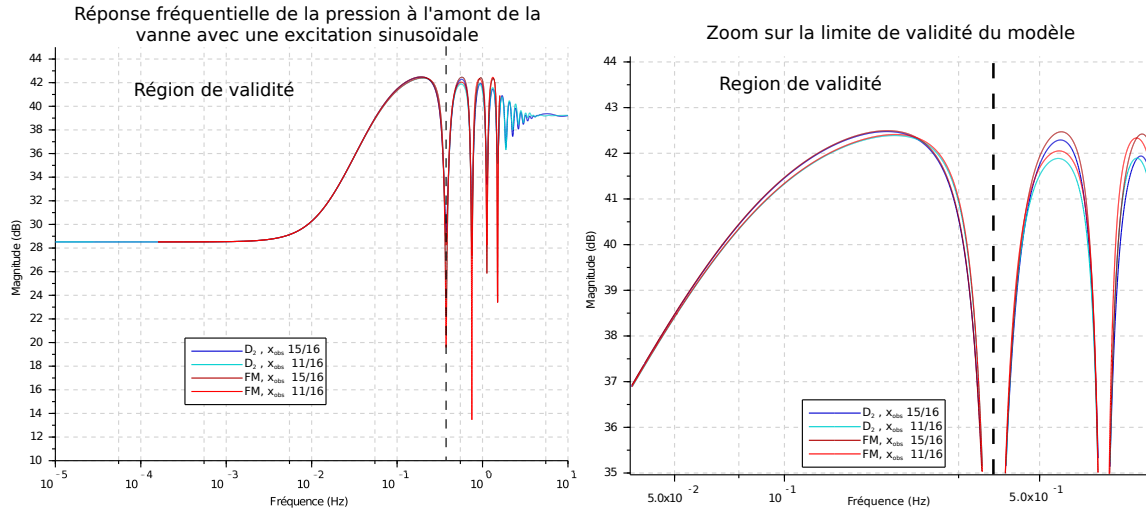
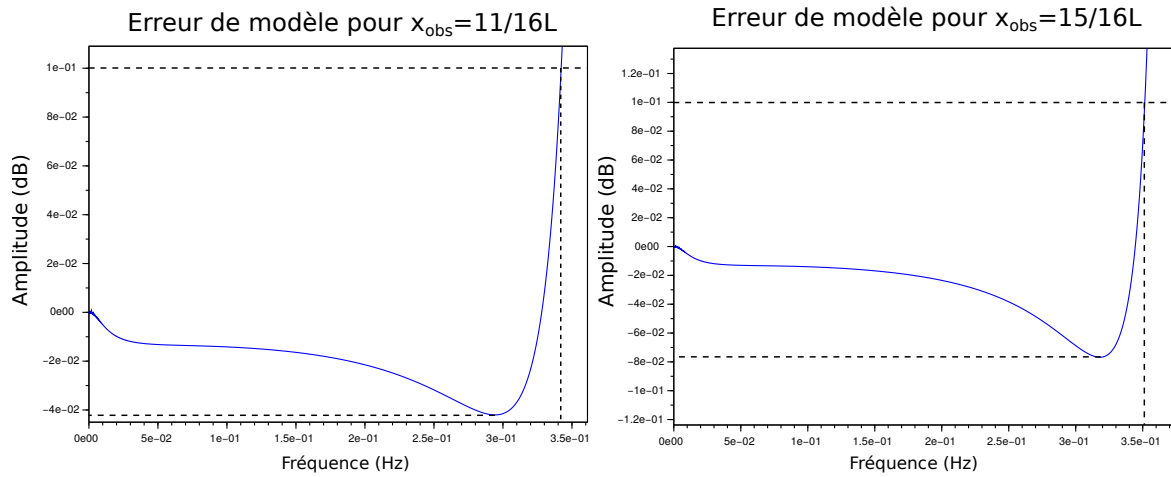


FIGURE 5.10 – Comparaison numérique entre les réponses fréquentielles : échelle logarithmique

FIGURE 5.11 – Erreurs entre modèles pour deux positions  $x = 11/16L$  et  $x = 15/16L$ 

## 5.6 Conclusions

L'objectif de ce chapitre a été de mettre en lumière plusieurs modèles d'une canalisation avec deux types de défauts, une obstruction ou une fuite, en vue de leur utilisation pour la surveillance.

Plus particulièrement les modèles par différences finies explicites incluent les effets d'instrumentation, de fuite, d'obstruction ponctuelle ou d'obstruction étendue ont été présentés.

Une analyse de sensibilité de la sortie par rapport à la position de l'obstruction a été proposée mettant en évidence la faible observabilité d'un des modèles.

Un modèle à base de différences finies implicites a donc été proposé pour y remédier.

Les modèles ont été validés avec des données expérimentales quand celles-ci étaient disponibles, et dans le cas contraire on a utilisé une méthode numérique basée sur la réponse fréquentielle.

On utilisera les modèles développés pour la surveillance de défauts dans une canalisation au chapitre suivant.





# Contributions aux méthodes de surveillance de pipelines

---

## Sommaire

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>91</b>
<b>6.2</b>	<b>Surveillance à partir d'un modèle d'état simple</b>	<b>92</b>
6.2.1	Détection de fuites	92
6.2.2	Détection et localisation de Fuite	98
6.2.3	Détection et localisation d'une obstruction : Approche par optimisation	102
6.2.4	Détection et localisation d'une obstruction : Utilisation d'un observateur à Grand Gain	106
<b>6.3</b>	<b>Surveillance à partir d'un modèle fréquentiel</b>	<b>111</b>
6.3.1	Détection et localisation d'une obstruction ponctuelle ou d'une fuite	112
6.3.2	Détection et localisation d'une obstruction étendue	119
6.3.3	Détection et localisation d'une obstruction ponctuelle et d'une fuite simultanément	125
<b>6.4</b>	<b>Surveillance à partir du modèle discrétisé plus précis</b>	<b>129</b>
<b>6.5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>131</b>

---

## 6.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente de nouvelles techniques pour la surveillance de pipelines, au sens de détection et localisation de défauts, incluant le cas largement étudié de fuite (voir par exemple [20, 24, 105, 98]), mais aussi celui moins considéré d'obstruction ponctuelle (comme dans les travaux [70, 1, 88]), ou encore plus original d'obstruction étendue (voir les travaux récents par exemple [65, 34, 101]). On peut enfin souligner qu'avec l'une des techniques proposées, un problème de détection et localisation d'obstruction et de fuite simultanés peut même être résolu, ouvrant la voie à des perspectives prometteuses sur les cas de défauts simultanés, connu comme problème encore largement ouvert dans les pipelines.

Selon les méthodes, différents types d'hypothèses sur le nombre de mesures utilisées seront faites, mais toujours en se limitant à des capteurs localisés aux extrémités du pipeline.

Mentionnons aussi que les méthodes s'appuient sur différents types de modélisation - selon les rappels et discussions des chapitres 4 et 5, et qu'en conséquence, elles utiliseront soit sur des techniques directes d'observateurs – pouvant dans ce cas faire référence aux résultats de la partie I, soit sur des techniques d'observation par optimisation.

Dans un premier temps, l'utilisation de modèle sous forme d'état obtenu par différences finies sera considérée, permettant d'une part la détection et localisation de fuite, voire d'obstruction, par observateur de type grand gain, et d'autre part la détection et localisation d'obstruction par minimisation d'erreur de sortie.

Dans un deuxième temps, une nouvelle façon d'exploiter le modèle fréquentiel directement basé sur la représentation du système en dimension infinie comme vue au chapitre 4, est proposée en vue de la détection et localisation d'obstructions ponctuelle, étendue, ou même combinée avec une fuite.

Enfin, une dernière catégorie d'approches est présentée sur la base du modèle à différences finies implicite introduit au paragraphe 5.4 par optimisation.

## 6.2 Surveillance à partir d'un modèle d'état simple

### 6.2.1 Détection de fuites

Comme on l'a dit le problème de détection de fuites a motivé beaucoup de travail au cours des deux dernières décennies. Ces travaux, s'appuient le plus souvent sur une mesure à chaque extrémité des pipeline, en plus de la connaissance des conditions aux limites. Dans cette partie, tirant profit des méthodes d'observation du chapitre 2, de nouvelles approches sont proposées n'utilisant qu'une mesure de débit de sortie et considérant (en plus) la possibilité de commander la pression à la sortie également.

Ceci est fait premièrement pour détecter dans une canalisation s'il existe une fuite et de quelle taille est la fuite et deuxièmement pour estimer en plus le coefficient de friction de la canalisation.

Pour les deux cas, on considérera un système fait d'une canalisation qui est reliée d'un côté à une pompe qui fournit un débit d'entrée de référence, et de l'autre côté à un réservoir d'eau qui fixe la pression de sortie, comme illustré par la figure 6.1. En modifiant le niveau d'eau dans le réservoir, il est possible de commander la pression de sortie de la canalisation ( $H_{out}$ ).

Le modèle correspondant peut être décrit, comme dans [14], en utilisant les equations du coup de bélier équations (4.2)-(4.1), discrétisées en une seule section avec des condition limites  $Q_{out}$

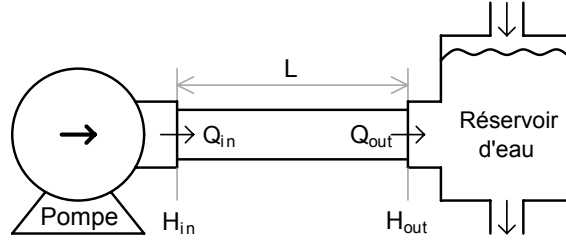


FIGURE 6.1 – Système

et  $H_{out}$ , et l'équation d'une fuite (4.7) :

$$\frac{d}{dt}H_{in} = -\frac{c^2}{agL}Q_{out} - \frac{Fc^2}{agL}\sqrt{H_{out}} + \frac{c^2}{agL}Q_{in} \quad (6.1)$$

$$\frac{d}{dt}Q_{out} = -\frac{ag}{L}(H_{out} - H_{in}) - \frac{f}{2Da}Q_{out}|Q_{out}| \quad (6.2)$$

où  $H_{in}$  et  $H_{out}$  respectivement représentent les pressions d'entrée et sortie en (m),  $Q_{in}$  et  $Q_{out}$  sont, respectivement, les débits dans la canalisation d'entrée et de sortie en ( $m^3/s$ ),  $F$  désigne le coefficient d'amplitude de la fuite qui pourrait apparaître dans la canalisation. Les tableaux 6.1 et 6.2 ci-dessous listent les paramètres constants et les limites sur l'entrée qui sont considérés dans ce modèle. Ces données correspondent au prototype expérimental présenté dans [8].

Lettres	Valeurs	Unités	Description
$a$	$3.4 \cdot 10^{-3}$	$m^2$	Section transversale
$g$	9.81	$m/s^2$	Accélération de la gravité
$L$	85	$m$	Longitude de la canalisation
$c$	372.567	$m/s$	Vitesse d'onde dans le fluide
$f$	0.0189		Coefficient de Friction
$D$	0.0661	$m$	Diamètre de la canalisation
$T_S$	0.2/0.5	$s$	Temps d'échantillonnage cas 1/cas 2

TABLE 6.1 – Paramètres constants du système

Limites	Valeur
$H_{2max}$	3.2 (m)
$H_{2min}$	2.8 (m)
Fréquence maximale de $H_2$	2 Hz
$ \dot{H}_2 _{max}$	1/50 (m/s)

TABLE 6.2 – Limites sur l'entrée du système

Pour surveiller le débit d'entrée  $Q_{in}$ , fixée par la pompe, et le paramètre de fuite  $F$ , le

système peut être étendu : en supposant que  $F$  et  $Q_{in}$  sont constant dans le temps - ou varient de façon très lente, leurs dynamiques peuvent être supposées égales à zero. On obtient ainsi un vecteur de variables d'état comme suit :

$$x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (H_{in}, Q_{out}, F, Q_{in})^T. \quad (6.3)$$

Par ailleurs, on suppose que l'entrée du système est  $u = H_{out}$  et la variable de sortie  $y = Q_{out}$

À partir de cela, le modèle en variables d'état étendu à temps continu devient :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{c^2}{agL}x_2 - \frac{c^2}{agL}x_3\sqrt{u} + \frac{c^2}{agL}x_4 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{ag}{L}(u - x_1) - \frac{f}{2Da}x_2|x_2| \\ \dot{x}_3 &= 0 \\ \dot{x}_4 &= 0 \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

Pour un meilleur conditionnement numérique,  $x_1$  est normalisé comme  $\bar{x}_1 = \frac{ga}{Lc}x_1$ , et en considérant le nouveau vecteur d'état :

$$\bar{x}^T = (\bar{x}_1, x_2, x_3, x_4)^T$$

le modèle peut être ré-écrit dans la suivante représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A(u)\bar{x} + B(u, y) \\ y &= C\bar{x} \end{aligned} \quad (6.4)$$

avec les matrices :

$$A(u) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{c}{L^2} & -\frac{c}{L^2}\sqrt{u} & \frac{c}{L^2} \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

$$B(u, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{ag}{L}u - \frac{f}{2Da}y|y| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En considérant un échantillonnage de période  $T_S$ , le système peut être discrétisé en utilisant

une seule matrice exponentielle [102] (eg comme dans [94]) :

$$\begin{bmatrix} A_k & B_k \\ 0 & I \end{bmatrix} = \exp \left\{ T_S \begin{bmatrix} A(k) & B(k) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}. \quad (6.7)$$

où 0 est la matrice nulle et  $I$  est la matrice identité, toutes les deux de dimensions appropriées.

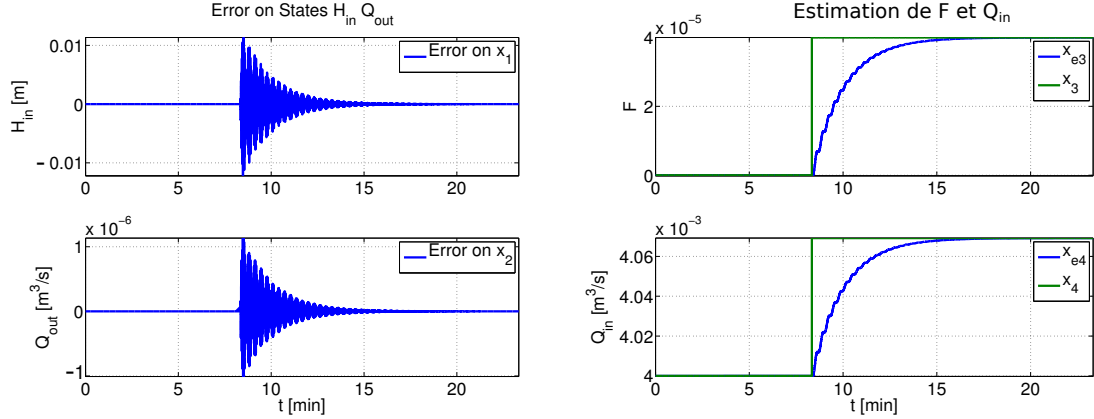


FIGURE 6.2 – Erreurs d'estimation des états  $H_{in}$  et  $Q_{out}$  et évolutions des états  $F$  et  $Q_{in}$  avec leurs estimations

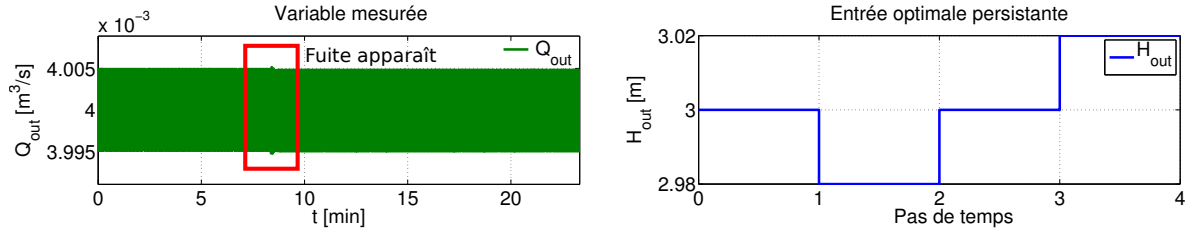


FIGURE 6.3 – Canalisation avec une obstruction étendue sur une longueur  $l_0$

En vu de (6.5) - (6.6) le système a une structure affine en l'état non-uniformément observable, et l'algorithme pour trouver une entrée persistante et optimale pour ce type de structure du chapitre 2 peut être appliqué. L'algorithme et l'observateur sont réglés avec les paramètres de la table 2.3. Pour que la détection ne soit pas triviale, on suppose que la pompe est commandée pour garantir un débit moyen de sortie de la canalisation constant.

Les résultats sont présentés dans les figures 6.2 et 6.3 où les états ainsi que leurs estimations et l'entrée optimale sont montrés. On peut voir que l'observateur converge exponentiellement vers les états réels du système à partir de la sortie. Quand  $t = 8min$  une fuite apparaît ( $f = 0 \rightarrow 4 \cdot 10^{-5}$ ) et la pompe modifie le débit d'entrée ( $Q_{in} = 4 \rightarrow 4.07 \cdot 10^{-3}$ ) pour compenser le débit de la fuite et que le débit de sortie reste constant ( $Q_{out} = 4 \cdot 10^{-3}$ ). Dans le Chapitre 2, on trouve les simulations pour ce système avec du bruit additionné dans la variable de sortie, voir figures 2.2 et 2.3.

Dans cette deuxième partie, l'objectif est de surveiller le débit d'entrée  $Q_{in}$ , le paramètre de la fuite  $F$  et le coefficient de friction  $f$ . La friction est fonction du nombre de Reynolds  $Re$  qui dépend de la vitesse du fluide [28], donc quand une fuite apparaît, elle modifie les débits

dans la canalisation ce qui entraîne un changement du coefficient de friction. En considérant les dynamiques des variables à surveiller égales à zéro, comme le cas précédent, le vecteur de variables d'état est :

$$x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (H_{in}, Q_{out}, F, Q_{in}, f)^T. \quad (6.8)$$

Les variable d'entrée et de sortie restent les mêmes  $u = H_{out}$  et  $y = Q_{out}$ , et on obtient ainsi, à partir des equations (6.1) et (6.2), le nouveau modèle en variables d'état étendu à temps continu :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{c^2}{agL}x_2 - \frac{c^2}{agL}x_3\sqrt{u} + \frac{c^2}{agL}x_4 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{ag}{L}(u - x_1) - \frac{1}{2Da}x_2|x_2|x_5 \\ \dot{x}_3 &= 0, \quad \dot{x}_4 = 0, \quad \dot{x}_5 = 0, \quad y = x_2 \end{aligned}$$

On normalise  $x_1$  en définissant  $\bar{x}_1 = \frac{ga}{Lc}x_1$  pour obtenir le vecteur d'état :

$$\bar{x}^T = (\bar{x}_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T.$$

et le modèle sous forme matricielle :

$$\dot{\bar{x}} = A(u, y)\bar{x} + Bu, \quad y = C\bar{x} \quad (6.9)$$

avec les matrices :

$$A(u, y) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{c}{L^2} & -\frac{c}{L^2}\sqrt{u} & \frac{c}{L^2} & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & -\frac{y|y|}{2Da} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{ag}{L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

$$C = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

La structure de ce modèle correspond à un système affine en l'état avec injection de sortie, toujours non-uniformément observable. Dans le chapitre 2 on a présenté un algorithme pour trouver une entrée persistante et optimale du point de vue énergétique pour ce type de système.

Pour discrétiser les matrice (6.10) et (6.11) on utilise l'équation (6.7), le temps d'échantillonnage devra être choisi pour que  $u(t)$  et  $y(t)$  soient constants entre deux échantillons consécutifs  $(k, k+1)$ .

En appliquant les équations (2.14) on construit une entrée optimale persistante pas à pas,

contrairement au cas antérieur où on pouvait trouver une séquence qui pouvait se répéter dans le temps. En utilisant alors les équations de l'observateur de Kalman en discret (Théorème 1.4), les états du système peuvent être estimés. Les paramètres de réglage de l'algorithme d'optimisation ainsi que de l'observateur sont dans la table 2.4.

Les figures 6.4, 6.5 et 6.6 illustrent le comportement du système et de l'observateur. Dans ces simulations, au temps  $t = 50\text{mins}$  la fuite apparaît ( $F = 0 \rightarrow 4 \cdot 10^{-5}$ ) simultanément le coefficient de friction change ( $f = 0.0189 \rightarrow 0.0236$ ). Comme énoncé précédemment, la pompe est commandée de sorte que le débit moyen de sortie soit toujours constant, et alors avec une simple inspection visuelle de la sortie on ne peut pas détecter la fuite. Dans le chapitre 2, on trouve les simulations pour ce système avec du bruit additionné dans la variable de sortie, voir les figures 2.6 et 2.7.

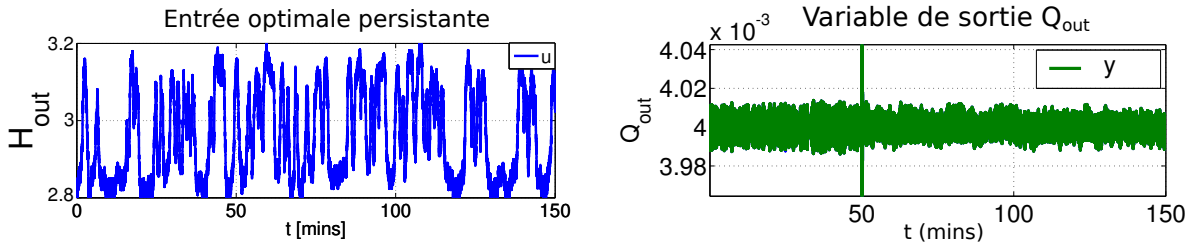


FIGURE 6.4 – Mesure de la variable de sortie  $Q_{out}$  et l'entrée optimale persistante  $H_{out}$ .

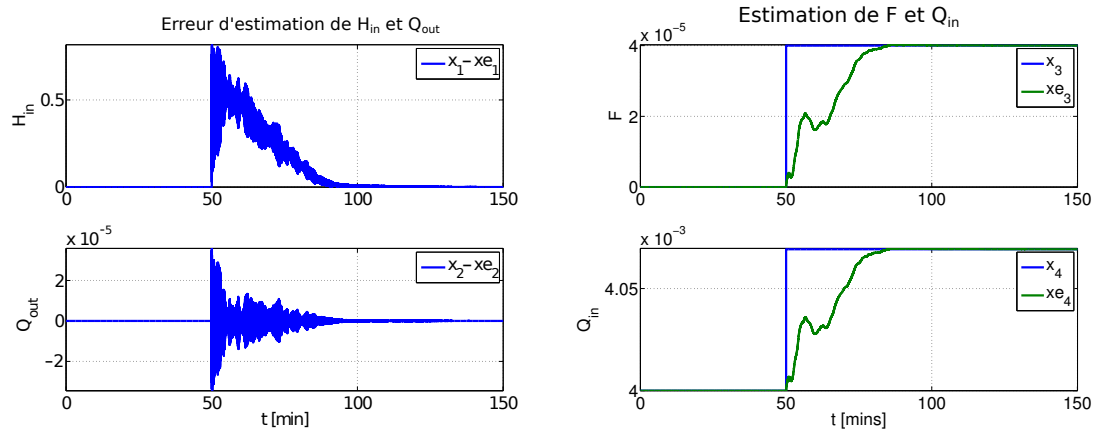


FIGURE 6.5 – Erreurs d'estimations des variables  $H_{in}$  et  $Q_{out}$  et variables  $F$  et  $Q_{in}$  avec leurs estimations.

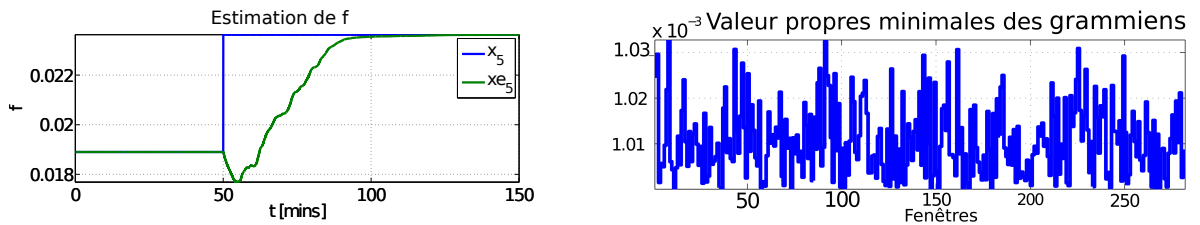


FIGURE 6.6 – Variables  $f$ , son estimation et les plus petites valeurs propres de chaque grammien d'observabilité



### 6.2.2 Détection et localisation de Fuite

Dans cette section, on s'intéresse à la détection et localisation d'une fuite à partir d'un modèle un peu plus complet présenté au chapitre 5 qui permet de réduire le nombre de mesures par rapport à la technique développée dans [97, 98] par exemple, qui est rappelée au chapitre 4.

Une méthodologie basée sur un observateur de Kalman étendu (EFK, définition 1.8) est proposée pour l'estimation simultanément de la taille d'une fuite et de sa position dans la canalisation dès son apparition. Il convient de souligner ici que, en raison de la nature des nouvelles conditions aux limites considérées, seulement deux mesures sur la canalisation sont nécessaires - la pression d'entrée et le débit de sortie, tandis que dans les approches par observateur traditionnelles (incluant les méthodes détaillées dans [97]), la mesure de quatre variables est nécessaire pour résoudre ce problème [104, 13, 98].

En réalité, les deux mesures supplémentaires correspondent aux conditions limites qui sont des valeurs constantes dans notre nouvelle modélisation, correspondant à la pression d'entrée de la pompe et à la pression atmosphérique, respectivement. Cela représente une amélioration d'un intérêt significatif du point de vue de quantité, qualité et placement de capteurs.

On reprend ici le modèle de la forme (5.1) - (5.2) - (5.3) proposé au chapitre 5 pour représenter les dynamiques d'écoulement de l'eau dans une canalisation avec restrictions, une pompe, et des fuites possibles (voir schéma 6.7). Sa précision dépend évidemment du nombre de points de la discrétisation, mais dans le but de développer un observateur pour réduire le coût de calcul de l'observateur un faible nombre de sections est préférable. Pour détecter et localiser une fuite, il faut au moins trois points, ou deux sections, de manière à pouvoir inclure la position de la fuite. Pour obtenir une représentation d'état on définit naturellement les variables d'état comme :

$$x_1 = H_1$$

$$x_2 = Q_2$$

$$x_3 = H_2$$

$$x_4 = Q_3$$

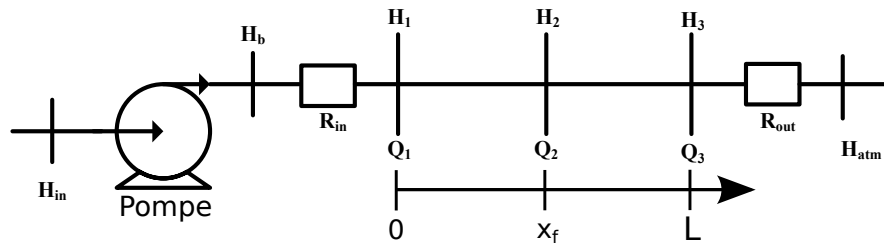


FIGURE 6.7 – Schéma du système pompe-canalisation avec la discrétisation spatiale

À présent, dans le but de détection et de l'estimation des paramètres de la fuite, on peut étendre le modèle avec :

$$\begin{aligned}x_5 &= z_2 \\x_6 &= F\end{aligned}$$

De plus, on peut considérer que  $u_1 = H_{in}$  et  $u_2 = H_{atm}$  sont les variables d'entrée pour la canalisation, et supposer que  $y_1 = H_1$  et  $y_2 = Q_3$  sont directement mesurés. Finalement, le modèle devient :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{c^2}{gA} \frac{x_2 - \frac{-C_1 + \sqrt{C_1^2 - 4(R_{in} + C_0)(-C_2 + x_1 - u_1)}}{2(R_{in} + C_0)}}{x_5} \\ \dot{x}_2 &= -Ag \frac{x_3 - x_1}{x_5} - \frac{f_2}{2DA} x_2 |x_2| \\ \dot{x}_3 &= -\frac{c^2}{gA} \frac{x_4 - (x_2 - x_6 \sqrt{x_3})}{L - x_5} \\ \dot{x}_4 &= -Ag \frac{(R_{out} x_4^2 + u_2) - x_3}{L - x_5} - \frac{f_3 x_4 |x_4|}{2DA} \\ \dot{x}_5 &= 0, \quad \dot{x}_6 = 0 \\ y_1 &= x_1, \quad y_2 = x_4\end{aligned} \tag{6.12}$$

Ce système peut être ré-écrit sous forme compacte :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= Cx\end{aligned} \tag{6.13}$$

Ici la fonction  $f$  et la matrice  $C$  sont obtenues directement à partir des équations (6.12).

A partir du système décrit par la représentation (6.13), les paramètres d'une fuite (position et amplitude) peuvent être estimés par un observateur de Kalman étendu (EFK, 1.8).

Afin d'améliorer sa stabilité, nous considérons sa version avec un facteur d'oubli régularisant (définition 1.8).

- *Remarque 1* : Pour mettre en œuvre un tel observateur pour le modèle (6.12), la fonction  $x_i |x_i|$  doit être approximée par une qui soit différentiable.
- *Remarque 2* : Les variables d'entrée  $u_1 = H_{in}$  et  $u_2 = H_{atm}$  sont presque constantes dans notre configuration de la canalisation (voir figure 6.7), car la pression  $H_{in}$  est fixée par le niveau du réservoir d'entrée, et  $H_{out}$  est la pression atmosphérique à la sortie du système. Cela implique que dans cette configuration l'observateur nécessite seulement deux mesures  $y_1 = H_1$  et  $y_2 = Q_3$  pour détecter et localiser une fuite (tout en gardant  $u_1, u_2$  constant), là où les méthodes précédentes nécessitent la mesure de quatre variables  $u_1, u_2, y_1$  et  $y_2$ .

Il est également possible d'imaginer différentes configurations de systèmes de canalisation, où le niveau d'entrée  $H_{in}$  n'est pas constant ou la pression de sortie n'est pas l'atmosphérique

$H_{out} \neq H_{atm}$ , par exemple : dans ce cas, les mesures de  $H_{in}$  et  $H_{out}$  deviennent nécessaires - et peuvent facilement être inclus dans l'observateur ci-dessus. Elles restent néanmoins que des pressions (ou des niveaux), et non des débits dont les mesures sont en général plus complexes et coûteuses.

Le point d'opération est considéré pour un débit d'entrée  $u_1 = Q_1 = 0.0043m^3/s$  et une pression de sortie  $u_1 = 3.5m$ , et les mesures - utilisées dans l'observateur - sont supposées affectées par un bruit blanc additif. D'abord on présente les résultats des estimations avec une fuite simulée avec une taille de 10% du débit  $Q_1$ , soit  $Q_{fuite} = 0.1Q_1$ , et à une position  $x_{fuite} = 63.75m$ , le tout est illustré dans la figure 6.8.

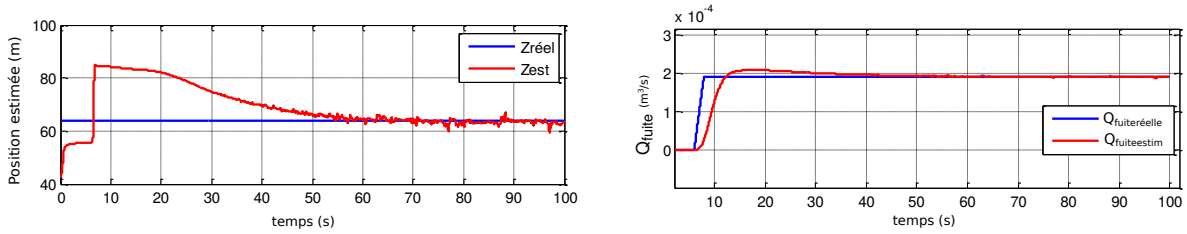


FIGURE 6.8 – Estimation de la taille et position d'une fuite sans et avec bruit additionné

L'estimation de l'état  $x_5$  est représentée dans la partie gauche de la figure 6.8, où on peut voir comment la valeur de la position de la fuite est obtenue très rapidement et avec une grande précision. De même, la partie droite de la figure 6.8 montre l'estimation de  $Q_{leak}$ , qui est obtenue plus rapidement que celle de la position de la fuite.

Afin de valider la capacité de l'observateur à estimer une fuite et sa position quand elle se produit, on montre les simulation des estimations de différentes positions de fuite le long de la canalisation, avec des pourcentages différents de fuite. La Figure 6.9 présente les résultats correspondants pour les fuites situées à des positions  $28.33m$ ,  $56.67m$  et  $70.83m$ , respectivement et les trois différents pourcentages de fuite correspondants, à savoir 10, 20 et 30% du débit d'entrée  $Q_1$ . Il convient de mentionner que dans ce scénario, les trois différentes fuites ne se produisent pas simultanément.

Comme on peut le voir sur la fig 6.9, l'observateur est en effet capable d'estimer les trois positions de fuite (en dépit de l'utilisation d'un modèle avec deux sections pour l'observateur, tandis que la canalisation est simulée avec un modèle à douze sections). Sur la même figure, on voit que l'observateur peut estimer très bien trois pourcentages différents de fuite .

Finalement, pour valider encore plus l'approche par observateur proposée, les résultats des estimations sont présentés ci-après en utilisant le même observateur, mais sur des données réelles tirées d'une expérience menée sur le même Prototype mexicain que celui résumé dans le tableau 6.3. Les caractéristiques expérimentales sont les suivantes : une seule fuite se produit au temps  $t = 128s$  et à la position  $x_f = 20m$ . Les résultats de l'estimation correspondante sont présentés dans la figure 6.10.

On peut vérifier sur cette figure la position de la fuite et son amplitude sont en effet bien estimées. Afin d'illustrer une certaine robustesse de cette approche, toujours en utilisant le

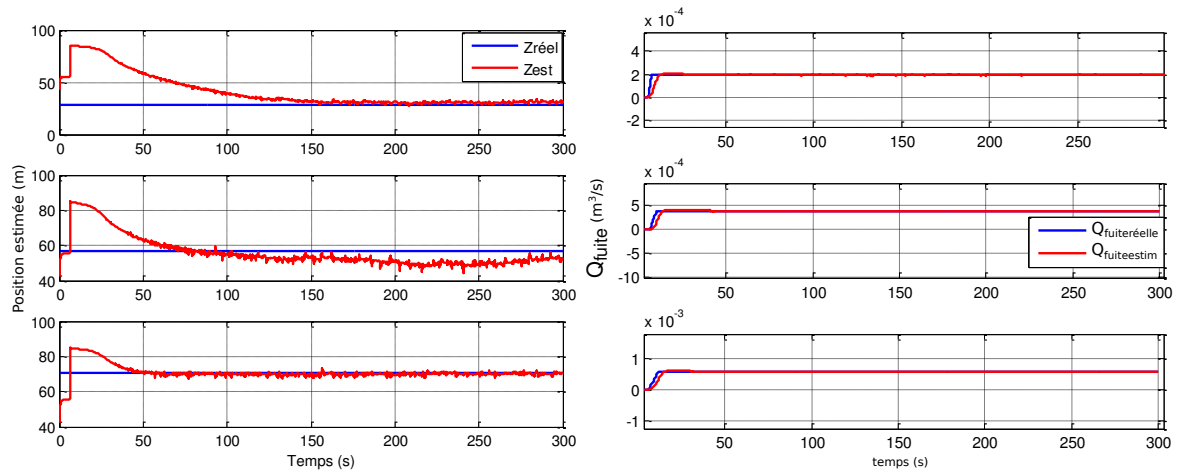


FIGURE 6.9 – Estimations de la taille et la position d'une fuite dans trois différents scénarios

$g$ ( $m/s^2$ )	$c$ ( $m/s$ )	$A$ ( $m^2$ )	$f$ ( $s^{-2}$ )	$L$ ( $m$ )
9.81	373	0.003	0.0223	85

TABLE 6.3 – Paramètres de la canalisation.

même observateur, on utilise des données d'une expérimentation modifiée (différentes conditions environnementales), les résultats obtenus sont illustrés dans la figure 6.10.

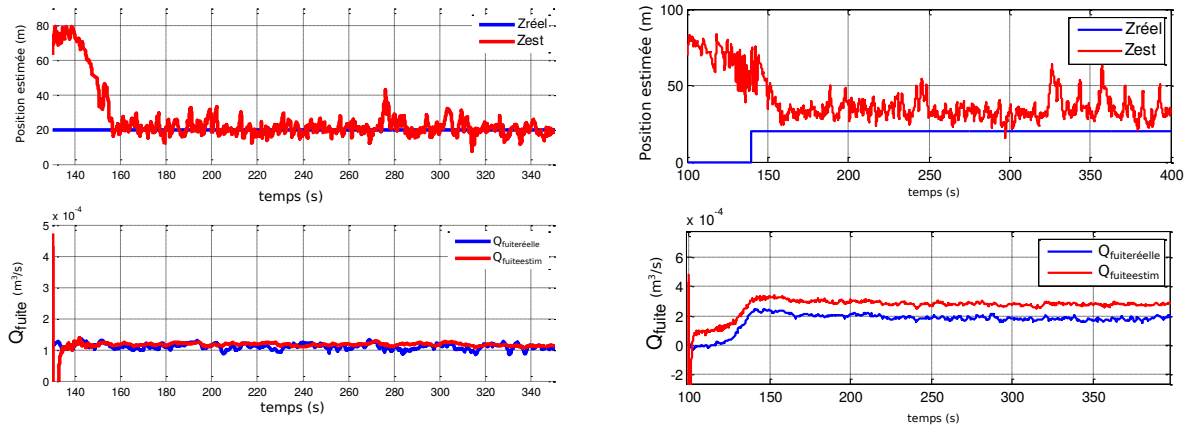


FIGURE 6.10 – Estimation en présence de bruit et en présence d'inexactitudes paramétriques

On voit comment l'observateur estime toujours la position de la fuite ( $x_f = 20m$ ) d'une manière acceptable, ainsi que son amplitude. Des erreurs statiques persistent, ce qui peut s'expliquer par un certain manque de calibrage du modèle dans ce second contexte, qui produit une estimation de l'observateur avec un certain biais.

Tout ceci montre que même en s'appuyant sur un modèle simple (réduit), avec quelques réglages appropriés, on peut obtenir de très bons résultats. Ils peuvent être un peu détériorés en présence d'inexactitudes paramétriques, mais de façon très limitée. Évidemment, un calibrage

précis du système est nécessaire pour obtenir de meilleurs résultats et améliorer la robustesse de l'approche à cet égard fera partie des développements futurs.

### 6.2.3 Détection et localisation d'une obstruction : Approche par optimisation

On considère ici une canalisation avec une possible obstruction à une position  $x_{obs}$  et une aire réduite  $A_b$  toutes deux inconnues. Le système est illustré dans la figure 6.11.

En prenant les equations en différences finies du tableau 4.2 correspondant aux conditions limites  $Q_{in}$  et  $H_{out}$  et combinant l'équation d'une obstruction ponctuelle (5.4), on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{H}_1 &= -\frac{c^2}{gA} \frac{Q_2 - Q_1}{x_{obs}} \\ \dot{Q}_2 &= -Ag \frac{H_2^- - H_1}{x_{obs}} - \frac{f_2 Q_2 |Q_2|}{2DA} \\ \dot{H}_2 &= -\frac{c^2}{gA} \frac{Q_3 - Q_2}{L - x_{obs}} \\ \dot{Q}_3 &= -Ag \frac{H_3 - H_2}{L - x_{obs}} - \frac{f_3 Q_3 |Q_3|}{2DA}\end{aligned}\tag{6.14}$$

$$H_2^- = H_2 - \frac{Q_2^2}{2gA^2} \left[ 1 - \left( \frac{A}{A_b} \right)^2 \right]$$

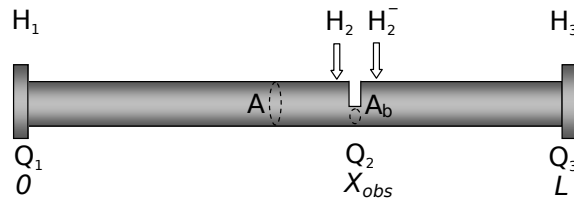


FIGURE 6.11 – Schéma d'une canalisation avec une possible obstruction

Si on définit  $u_1 = Q_1$  et  $u_2 = H_3$  comme les variables d'entrée du système,  $x_1$  à  $x_4$  comme les variables d'état qui représentent les variables  $H_1$  à  $Q_3$ ,  $x_5 = x_{obs}$  comme la position de l'obstruction, et

$$x_6 = A^2/(A_b)^2\tag{6.15}$$

comme l'amplitude de l'obstruction, alors on peut écrire le système (6.14) en variables d'état :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{c^2}{gA} \frac{x_2 - u_1}{x_5} \\
\dot{x}_2 &= -Ag \frac{\left(x_3 - \frac{x_2^2(1-x_6)}{2gA^2}\right) - x_1}{x_5} - \frac{fx_2|x_2|}{2DA} \\
\dot{x}_3 &= -\frac{c^2}{gA} \frac{x_4 - x_2}{L - x_5} \\
\dot{x}_4 &= -Ag \frac{u_2 - x_3}{L - x_5} - \frac{fx_4|x_4|}{2DA} \\
\dot{x}_5 &= 0 \\
\dot{x}_6 &= 0
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Notons ici que le coefficient de frottement  $f$  est considéré comme la moyenne des coefficients  $f_2$  et  $f_3$ .

Normalement dans les études de surveillance de canalisations, une paire de mesures est utilisée, avec une mesure de chaque côté de la canalisation, mais pour ce cas on supposera que seulement la mesure de  $H_1$  est disponible, donc  $y = x_1$ .

Sur ces bases, un schéma de surveillance est proposé en deux temps : d'abord la détection de l'obstruction avec estimation de son amplitude ( $x_6$ ) et ensuite l'estimation de sa position.

• Détection : pour la détection, un système simple est proposé en considérant seulement les equations en régime permanent. À partir du modèle (6.16), on obtient en effet :

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_4 = u_1 \\
x_3 &= -\alpha x_2|x_2|x_5 + y + \frac{x_2^2(1-x_6)}{2gA^2} \\
x_3 &= u_2 + \alpha x_4|x_4|(L - x_5)
\end{aligned} \tag{6.17}$$

avec  $\alpha = \frac{f}{2gDA^2}$ , et donc :

$$x_6 = 1 + \frac{2gA^2(y - u_2 - \alpha u_1|u_1|L)}{u_1^2} \tag{6.18}$$

car normalement  $u_1 \neq 0$ .

À partir de l'expression ci-dessus (qui évidemment en pratique peut être filtrée), on obtient directement une estimation  $\hat{x}_6$  pour  $x_6$ , et un détecteur simple peut se construire par comparaison de cette valeur avec 1 : il existe une obstruction si  $x_6 > 1$ , et si  $x_6 = 1$ , alors il n'y a pas d'obstruction dans la canalisation.

Dans la pratique, on peut considérer qu'il existe une obstruction dès lors que  $|\hat{x}_6 - 1| \geq T_b$  pour un seuil  $T_b$  à choisir.

• Localisation : on remarque de l'analyse en régime permanent ci-dessus que la *position ne peut pas être estimée en régime permanent*. Une solution est donc que, lorsque l'obstruction est détectée, le régime de fonctionnement varie un peu, de sorte que la position de l'obstruction puisse être estimée : elle peut par exemple être obtenue par minimisation directe de la différence entre la pression mesurée et celle calculée à partir d'un modèle, comme dans un procédé d'identification par erreur de sortie. Cette approche est illustrée dans la suite.

• Exemple illustratif : on considère ici le cas d'une canalisation simulée à partir d'un modèle sous la forme du tableau 4.2, avec conditions limites  $Q_{in}$   $H_{out}$ ) et un nombre de sections égales à 5 ( $\Delta x = L/5$ ).

Afin de représenter une erreur de modèle, la procédure de détection et localisation sera elle basée sur un modèle à 2 sections seulement. Les valeurs numériques des paramètres sont ceux du prototype présenté dans [8], et rappelées dans la table 6.4 ci-dessous.

$g$ ( $m/s^2$ )	$c$ ( $m/s$ )	$A$ ( $m^2$ )	$f$ ( $s^{-2}$ )	$L$ ( $m$ )
9.81	373	0.003	0.0189	85

TABLE 6.4 – Paramètres de la canalisation prototype décrite dans [8].

Le point d'opération est fixé par un débit d'entrée  $u_1 = 0.0043 m^3/s$  et une pression de sortie  $u_2 = 3.5m$ . Une obstruction d'une taille de 60% de la section transversale  $A$  ( $A_b = 0.4A$ ) est simulée à la position  $x_{obs} = 34m$ , apparaissant au temps  $t = 10sec$ .

Les comportements principaux des pressions et débits résultants de l'apparition d'une obstruction dans la canalisation sont présentés dans la figure 6.12.

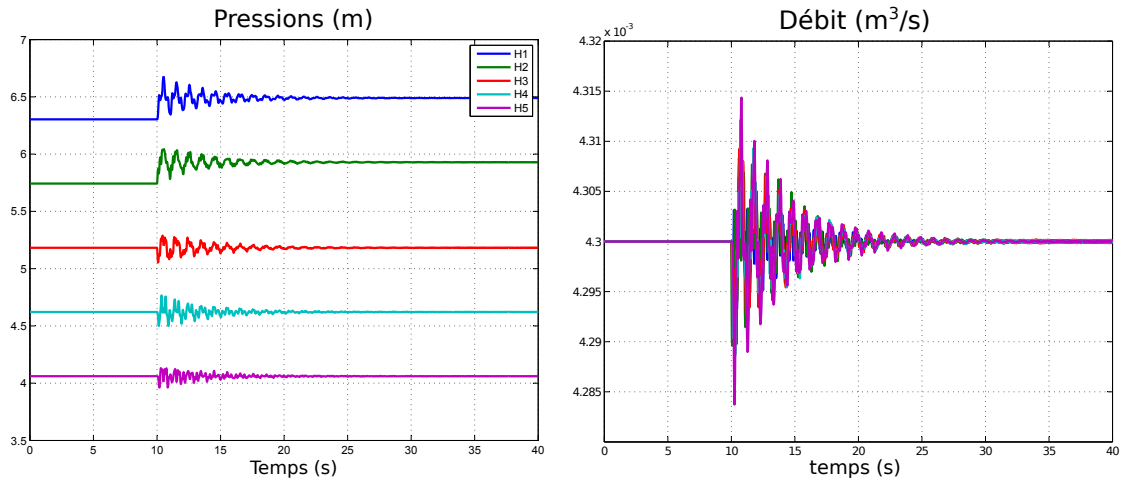


FIGURE 6.12 – Simulation des pressions et débits sous une obstruction (comportements principaux).

Finalement, la seule mesure disponible est la pression à l'entrée de la canalisation  $H_1$ , et elle est considérée perturbée par un bruit blanc gaussien additif lors de son utilisation pour

l'estimation, c'est à dire :

$$y = H_1 + w$$

avec  $w$  un bruit de moyenne zero avec une amplitude correspondante à quelques pourcents de la valeur nominale de  $H_1$ . Une illustration de cette mesure apparaît dans la figure 6.13.

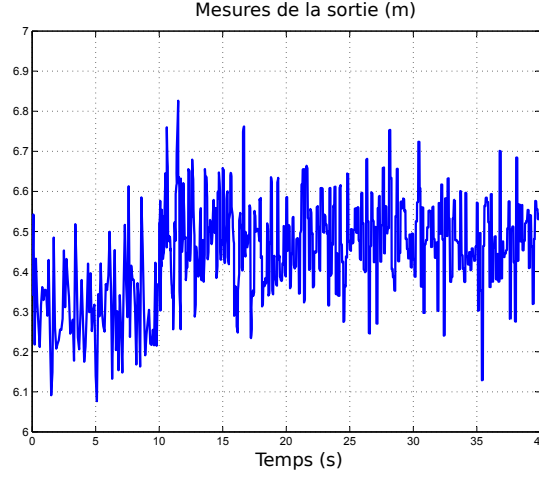


FIGURE 6.13 – Mesure bruitée de  $H_1$ .

La figure 6.14 ci après présente les résultats d'estimation de  $x_6$ , caractérisant l'obstruction comme définie dans l'équation (6.15), quand on utilise l'expression (6.18) avec un filtre de premier ordre :

on peut voir comment l'obstruction est en effet détectée (et estimée) après un temps  $t = 10\text{sec}$  (en considérant un seuil de détection  $T_b = 1.5$  par exemple, l'obstruction est quasi immédiatement détectée).

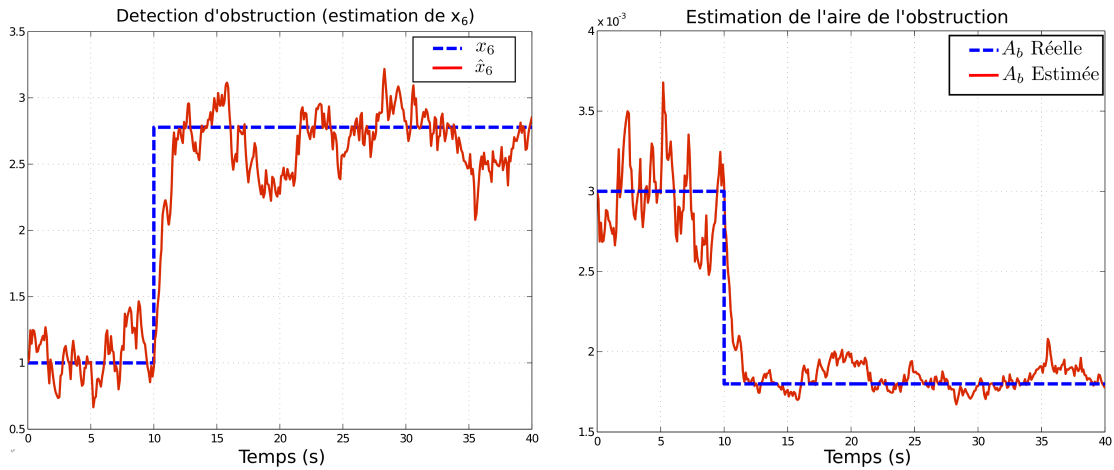


FIGURE 6.14 – Détection d'une obstruction et son aire transversale via l'estimation de  $x_6$ .

Dans la même figure on présente l'estimation de la réduction de l'aire transversale de la canalisation correspondant à l'obstruction ( $A_b$ ) (elle est directement déduite de l'estimation de  $x_6$ ).



Dès que l'obstruction est détectée, l'estimation correspondant à  $x_6$  peut être utilisée dans le modèle (6.16) pour réaliser l'estimation de la position de l'obstruction.

Dans ce but, un signal sinusoïdal additionnel (de fréquence et amplitude relativement faible pour ne pas perturber trop le fonctionnement de la canalisation) est ajouté au débit d'entrée  $u_1$  (montré dans la figure 6.15), de manière à mettre en place la procédure d'optimisation : le signal de mesure résultant (sujet au bruit) est donc enregistré sur une fenêtre de temps après la détection (comme illustré dans la figure 6.15) et  $x_{obs}$  est estimé en minimisant la norme au carré entre cette mesure et celle générée par le modèle de 2 sections (6.16) sur la fenêtre de temps considérée.

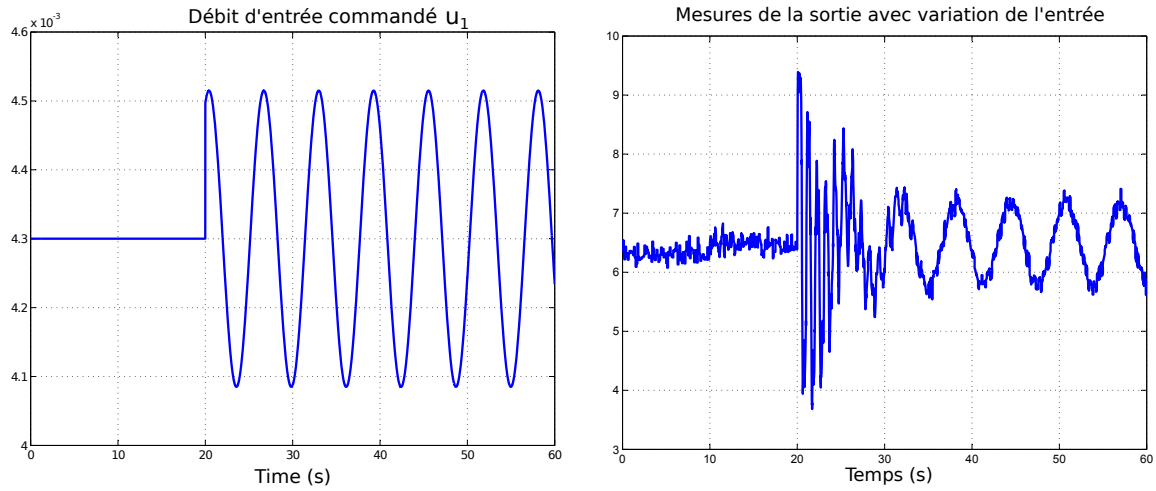


FIGURE 6.15 – Profile de l'entrée  $u_1$  pour la localisation et effets sur la sortie.

Cette procédure donne finalement une estimation de la position de blocage :

$$\hat{x}_6 = 35.86m,$$

comme illustré dans la figure 6.16 ci-dessous, qui fournit la position avec seulement 2% d'erreur.

La procédure générale de surveillance proposée peut donc être comme suit (voir aussi la figure 6.17 ci-après) :

en utilisant la connaissance du débit d'entrée appliqué et la pression de sortie, ainsi que la seule mesure de la pression à l'amont de la canalisation, le test de détection de blocage peut être exécuté, et chaque fois qu'il est positif, la procédure de localisation de blocage peut être activé, comme expliqué précédemment.

#### 6.2.4 Détection et localisation d'une obstruction : Utilisation d'un observateur à Grand Gain

Toujours dans le contexte de détection et localisation d'obstruction on présente maintenant une méthode plus directement basée sur observateur, dans l'esprit de ce qui a été fait pour la

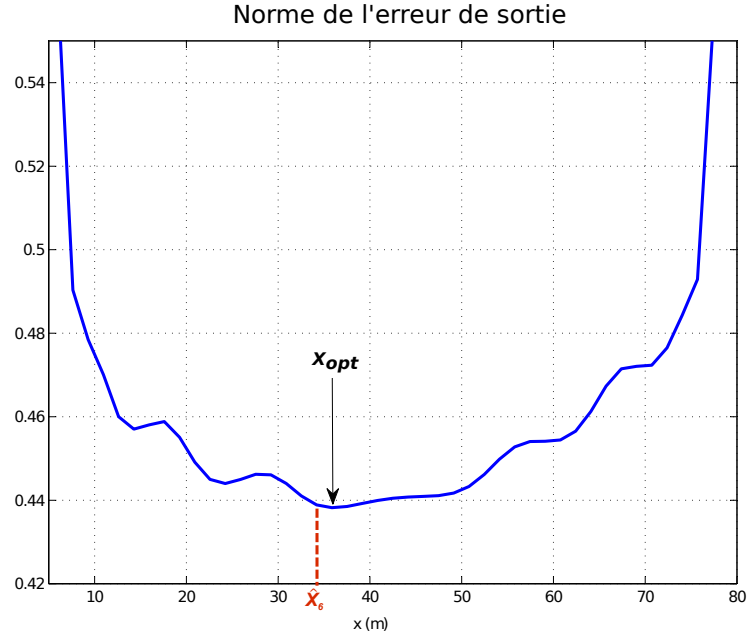


FIGURE 6.16 – Estimation de la position de l'obstruction.

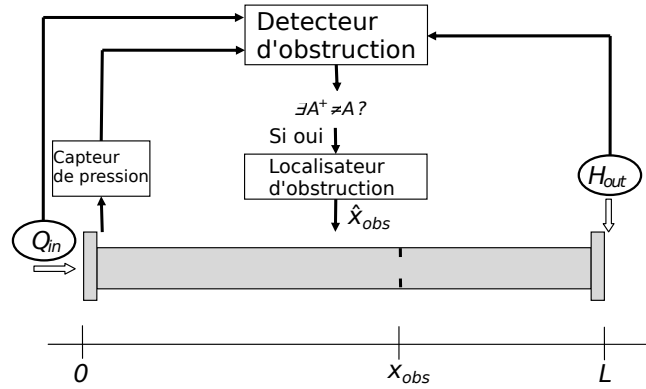


FIGURE 6.17 – Surveillance d'une obstruction.

fuite dans [97] et rappelé à la section 4.5 .

Comme précédemment, on considère une canalisation avec une obstruction possible à une position  $x_{obs}$  et une aire réduite  $A_b$  toutes deux inconnues. On ajoute au système une pompe centrifuge une restriction à l'amont et une autre restriction à l'aval, comme illustré dans la figure 6.18. En prenant les equations en différences finies du tableau 4.2 correspondant aux conditions limites  $Q_{in}$  et  $Q_{out}$  et en les combinant avec l'équation d'une obstruction ponctuelle (5.4) on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{Q}_1 &= -Ag \frac{H_2 - H_1}{x_{obs}} - \frac{f_2 Q_1 |Q_1|}{2DA} \\ \dot{H}_2 &= -\frac{c^2}{gA} \frac{Q_2 - Q_1}{L - x_{obs}}\end{aligned}\quad (6.19)$$

$$\begin{aligned}\dot{Q}_2 &= -Ag \frac{H_3 - H_2^-}{L - x_{obs}} - \frac{f_3 Q_2 |Q_2|}{2DA} \\ H_2^- &= H_2 - \frac{Q_2^2}{2gA^2} \left[ \left( \frac{A}{A_b} \right)^2 - 1 \right]\end{aligned}\quad (6.20)$$

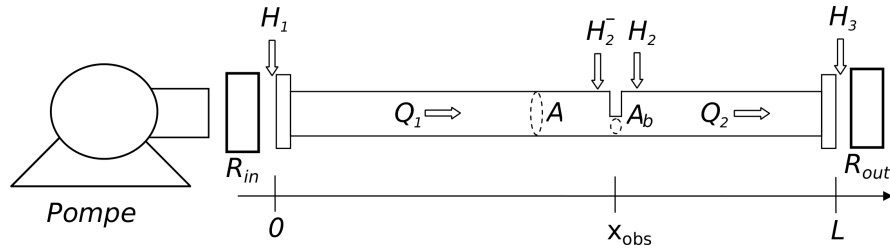


FIGURE 6.18 – Système d'une canalisation alimentée par une pompe avec une obstruction.

Les équations de connections entre le modèle de la canalisation, la pompe et les restrictions sont faites à partir des équations de la table 4.1. La pression à l'amont et à l'aval de la canalisation peuvent donc s'écrire :

$$\begin{aligned}F_P(H_{in}, Q_1) &= H_1 = -(R_{in} + C_P)Q_1^2 - B_P Q_1 - A_P + H_{in} \\ F_R(H_{out}, Q_2) &= H_3 = R_{out}Q_2^2 + H_{out}\end{aligned}\quad (6.21)$$

On définit le vecteur d'états comme :

$$\begin{aligned}x^T &= [Q_1, H_2, Q_2, z_2, Obs]^T \\ Obs &= \frac{\left( \frac{A}{A_b} \right)^2 - 1}{2gA^2}\end{aligned}$$

et les équations (6.19), (6.20) et (6.21), le modèle d'état s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -Ag \frac{x_2 - F_P(u_1, x_1)}{x_4} - \frac{f_2 x_1 |x_1|}{2DA} \\
 \dot{x}_2 &= -\frac{c^2}{gA} \frac{x_3 - x_1}{x_4} \\
 \dot{x}_3 &= -Ag \frac{F_R(u_2, x_3) - x_2 + x_3^2 x_5}{L - x_4} - \frac{f_3 x_3 |x_3|}{2DA} \\
 \dot{x}_4 &= 0 \\
 \dot{x}_5 &= 0 \\
 y_1 &= x_1 \\
 y_2 &= x_3
 \end{aligned}$$

où  $y$  décrit les variables mesurées, et  $u_1, u_2$  correspondent aux conditions limites, agissant comme entrées. Comme à la section précédente, on peut procéder ici en deux temps : détection (avec estimation directe de  $x_5$ ) puis localisation (par observateur).

• Détection : la détection peut se réaliser en régime permanent en considérant  $u_1$  et  $u_2$  constants pour un temps suffisamment long. Les dynamiques de la canalisation deviennent zero ( $\dot{x} = 0$ ), et les pertes par friction sont toutes égales tout au long de la canalisation ( $f_2 = f_3 = f$ ). L'information de l'obstruction peut alors se trouver en résolvant les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_5 &= \frac{F_R(u_2, y_2) - F_P(u_1, y_1)}{y_2^2} + \frac{fL}{2DA^2g} \frac{|y_2|}{y_2} \\
 \dot{\hat{x}}_{5F} &= \alpha(\hat{x}_5 - \hat{x}_{5F}) \\
 \frac{A_b}{A} &= \frac{1}{\sqrt{1 + 2gA^2x_{5F}}}
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

où  $\alpha$  est un coefficient de filtrage sur  $\hat{x}_5$ .

• Localisation : dès que l'obstruction est détectée, un observateur pour la localiser peut être mis en place.

Avec le changement de coordonnées,  $\zeta_1 = \frac{x_1}{Ag}$ ,  $\zeta_2 = \frac{1}{x_4}$  et  $\zeta_3 = -\frac{x_2}{x_4}$  on obtient la représentation suivante :

$$\begin{aligned}
 \dot{\zeta}_1 &= F_P(u_1, y_1)\zeta_2 + \zeta_3 - \frac{f_2 y_1 |y_1|}{2DA^2g} \\
 \dot{\zeta}_2 &= 0 \\
 \dot{\zeta}_3 &= \frac{c^2}{Ag}(y_2 - y_1)\zeta_2^2
 \end{aligned}$$

qui donne un système de type :

$$\begin{aligned}
 \dot{\zeta} &= A_\zeta(u, y)\zeta + \Phi_\zeta(\zeta, u, y) \\
 y &= C\zeta
 \end{aligned}$$

avec les matrices :

$$A_\zeta(u, y) = \begin{bmatrix} 0 & F_P(u_1, y_1) & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_\zeta(u, \zeta) = \begin{bmatrix} -\frac{f_2}{2DA^2g}y_1|y_1| \\ 0 \\ \frac{c^2}{Ag}(y_2 - y_1)\zeta_2^2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Avec une entrée suffisamment persistante  $u_1$ , un observateur à convergence exponentielle, pour ce système est donné par le théorème 1.2, avec  $R$ ,  $Q$  et  $\gamma$  comme paramètres de réglage.

*Remarque :* Pour garantir la convergence de l'observateur,  $\Phi$  doit être une fonction Lipschitz, mais, si on suppose que la position de l'obstruction se trouve dans l'intervalle  $[\varepsilon, L - \varepsilon]$  pour un petit  $\varepsilon > 0$ ,  $\Phi$  peut être étendu pour être Lipschitz dans  $\mathbb{R}^3$  pour la conception de l'observateur.

La position de l'obstruction sera finalement donnée par la relation  $x_4 = \frac{1}{\zeta_2}$  :

Pour une estimation simultanée d'amplitude et de position, sous l'application d'une entrée persistante, on peut combiner à l'observateur précédant un deuxième basé sur la nouvelle coordonnée  $\xi_1 = \frac{x_3(L-x_4)}{Ag}$ ,  $\xi_2 = x_5$  et les entrées  $u_{\xi 1} = -\frac{\dot{\xi}_3}{\zeta_2}$  et  $u_{\xi 2} = \frac{1}{\zeta_2}$ . On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= -F_R(u_2, y_2) + u_{\xi 1} - y_2^2 \xi_2 - \frac{f_3(L - u_{\xi 2})}{2DA^2g}y_2|y_2| \\ \dot{\xi}_2 &= 0 \end{aligned}$$

qui est un système de type :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_\xi(u)\xi + B_\xi(u) \\ y &= C\xi \end{aligned}$$

avec les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} A_\xi(u) &= \begin{bmatrix} 0 & -y_2^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B_\xi(u) &= \begin{bmatrix} u_{\xi 1} - F_R(u_2, y_2) - \frac{f_3(L - u_{\xi 2})}{2DA^2g}y_2|y_2| \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.23}$$

Un observateur pour ce système se construit avec les équations du théorème 1.2, avec  $R_O$ ,  $Q_O$  et  $\gamma_O$  comme paramètres de réglage.

Le ratio  $A_b/A$  est donné par l'équation (6.22) en remplaçant  $x_{5F}$  par  $\xi_2$ .

Pour les simulations numériques on considère le prototype décrit dans [8] comme exemple

pratique pour la validation de l'approche proposée, les paramètres correspondants sont dans la table 6.4.

La simulation commence avec un mode de fonctionnement en régime permanent, avec  $u_1 = 6.5m$  et  $u_2 = 1$ . Soudain, au temps  $t = 10s$ , une obstruction, avec  $A_b = 0.9A$ , apparaît à  $x_{obs} = 78m$ . Quand l'obstruction est détectée, une entrée persistante est injectée,  $u_1 = 6.5 + 0.5\sin(2\pi t) + 1.5\sin(2.06\pi t)$ , et la position est estimée. Pour montrer la seconde partie de l'observateur, l'obstruction, à  $t = 50s$ , se déplace vers  $x_{obs} = 70m$  et augmente à  $A_b = 0.5A$ .

Pour l'observateur, la sortie du système est supposée perturbée par un bruit blanc gaussien additif de quelques pourcents de la valeur de sortie de manière à simuler le bruit de mesure.

Les valeurs numériques des paramètres utilisés dans les algorithmes sont :  $\alpha = 1$ ,  $R = 1$ ,  $Q = I_D$ ,  $\gamma = 4$ ,  $R_O = 1$ ,  $Q_O = I_D$  et  $\gamma_O = 1$ . La figure 6.19 montre les résultats des simulation numérique, l'observateur récupère bien la position et la taille de l'obstruction. La simulation montre aussi que la robustesse au bruit augmente avec la taille de l'obstruction.

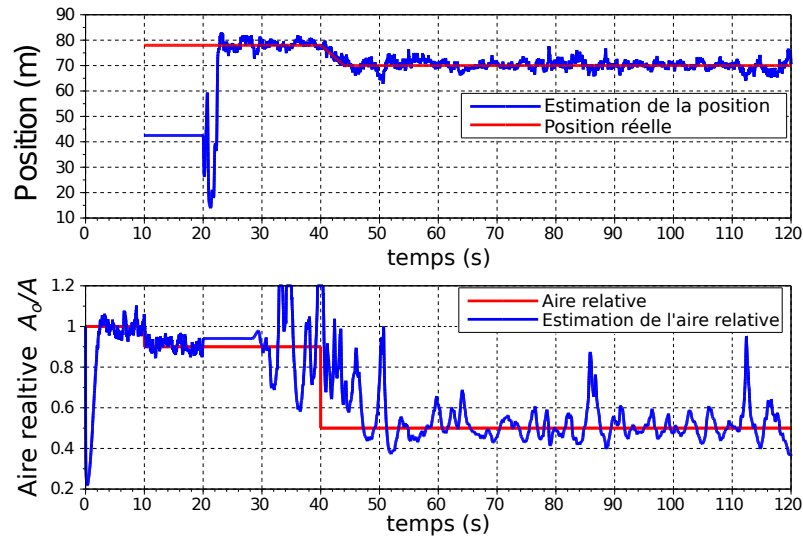


FIGURE 6.19 – Simulation d'une obstruction dans deux positions et deux tailles différentes.

### 6.3 Surveillance à partir d'un modèle fréquentiel

Dans cette partie, on examine les possibilités d'utiliser la modélisation fréquentielle rappelé au chapitre 4, pour la détection et la localisation d'obstruction, de fuite, voir les deux simultanément.

### 6.3.1 Détection et localisation d'une obstruction ponctuelle ou d'une fuite

On reprend le modèle linéaire fréquentiel d'une canalisation avec un défaut, une obstruction ou une fuite, du chapitre 4 illustrée dans la figure 6.20. Le système est composé de quatre éléments, deux canalisations similaires de longueurs  $x_D$  et  $L - x_D$ , un défaut, une obstruction ponctuelle ou une fuite, et une vanne d'ouverture  $u$  qui décharge à pression atmosphérique (comme illustré par le schéma de la figure 6.21).

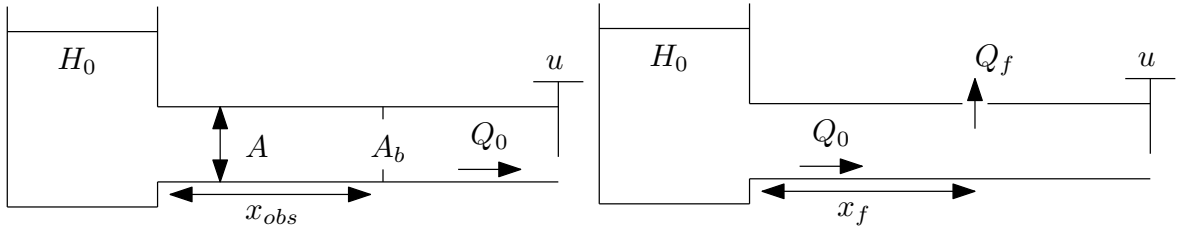


FIGURE 6.20 – Croquis des éléments pour la détection d'une obstruction ponctuelle ou d'une fuite

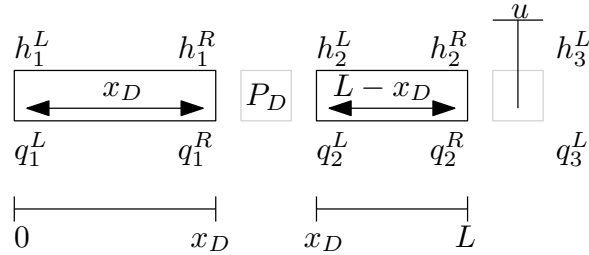


FIGURE 6.21 – Croquis des éléments pour la détection d'une obstruction ponctuelle ou d'une fuite

Le réservoir est considéré avec un volume assez grand pour garantir une pression constante à l'amont  $H_o$  qui donne le point d'opération en régime permanent et produit un débit à l'aval  $Q = Q_o$  pour une ouverture de la vanne  $U_0$ .

On considère que l'ouverture de la vanne oscille sinusoïdalement autour du point d'opération. L'objectif maintenant est de calculer la pression à l'amont de la vanne pour une fréquence d'oscillation  $\omega$ . Pour cela on utilise les matrices déjà présentées dans le chapitre 4. La dynamique des deux sections de canalisation est décrite par les matrices de transition  $F_i$  de longueur  $l_i$  et paramètres  $Z_c$  et  $\mu_i$  pour  $i = 1, 3$  :

$$\begin{Bmatrix} q_i \\ h_i \end{Bmatrix}^R = \begin{bmatrix} \cosh(\mu_i l_i) & -\frac{1}{Z_c} \sinh(\mu_i l_i) \\ -Z_c \sinh(\mu_i l_i) & Z_c \cosh(\mu_i l_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_i \\ h_i \end{Bmatrix}^L$$

où,

$$Z_c = -i \frac{\mu_i a_i^2}{wg A_i}$$

$$\mu_i = \sqrt{-\frac{\omega^2}{a^2} + j \frac{g A \omega R}{a^2}}$$

$$R = \frac{Q_o f}{D A^2 g}$$

Si le défaut est une obstruction ponctuelle, alors on utilise une matrice de raccordement  $P_o$  :

$$\begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_2^L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 \frac{\Delta H_o}{Q_o} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_1^R$$

$\Delta H_o$  est la perte de pression causée par l'obstruction

et si le défaut est une fuite on utilise la matrice de raccordement  $P_f$  :

$$\begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_2^L = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{Q_L}{2H_o} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_1^R$$

$Q_L$  est la perte de débit causée par la fuite

Pour le dernier élément, la vanne oscillante, la matrice de raccordement correspondante est :

$$\begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_3^L = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{Q_0}{(CdU_0)^2} & 1 \end{bmatrix}}_{P_{ov1}} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_2^R + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{Q_0^2}{(CdU_0)^2 U_0 g} \end{bmatrix}}_{P_{ov2}} u$$

En regroupant les matrices on obtient le système des fonctions de transfert, entre l'amont et l'aval de la canalisation et de la vanne, comme suit :

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_3^L = P_{ov1} F_{(L-x_D)} P_D F_x \begin{Bmatrix} q_1 \\ h_1 \end{Bmatrix}_1^R + P_{ov2} u \\ \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_2^R = P_{ov1} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_3^L + P_{ov2} \end{cases}$$

où  $P_D = P_o$  si on cherche une obstruction et  $P_D = P_f$  si on cherche une fuite. Les conditions de frontière données par le réservoir et l'atmosphère impliquent que :

$$h_1^L = 0$$

$$h_3^L = 0$$



d'autre part la variable mesurée est la pression à l'amont de la vanne :

$$y = h_2^R$$

On désigne le vecteur des variables inconnues  $\xi$ , soit pour la détection d'obstruction :

$$\xi = [Re(q_1^R), Im(q_1^R), Re(q_2^R), Im(q_2^R), Re(q_3^L), Im(q_3^L), \Delta H_o, x_D]^T$$

et pour la détection d'une fuite :

$$\xi = [Re(q_1^R), Im(q_1^R), Re(q_2^R), Im(q_2^R), Re(q_3^L), Im(q_3^L), Q_L, x_D]^T$$

Pour trouver la valeur du vecteur  $\xi$ , on doit résoudre le problème de trouver le zero de la fonction suivante :

$$F(\xi) = \begin{bmatrix} P_{ov1} F_{(L-x_D)} P_D F_x \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_1^L + P_{ov2} - \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_3^L \\ P_{ov1} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_2^R + P_{ov2} - \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_3^L \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

avec les contraintes suivantes, pour une obstruction :

$$0 < \xi_7 < H_0$$

$$0 < \xi_8 < L$$

et pour une fuite :

$$0 < \xi_7 < Q_0$$

$$0 < \xi_8 < L$$

On remarque que  $F(\xi)$  est composé de 4 équations complexes, ce qui se traduit en 8 équations réelles ( $Re(F(\xi)) = 0$  et  $Im(F(\xi)) = 0$ ) avec 8 inconnus, mais comme les fonctions  $\sinh$  et  $\cosh$  sont non convexes pour des arguments complexes, il se peut que pour une fréquence donnée il existe plusieurs solutions au problème (6.24). Dans ce cas, l'entrée n'est pas une entrée persistante et le système est non observable pour cette entrée. Dans les figures 6.22 et 6.23 on peut apprécier la sensibilité de la sortie, la pression à l'amont de la vanne, pour des variations dans la taille et la position d'une obstruction et d'une fuite.

Ayant la bonne excitation, dans l'implémentation pratique, on se confronte au problème relié aux instruments de mesure qui est le bruit additif lors de la mesure. En conséquent, supposant que la mesure de la sortie est bruitée avec un bruit blanc, gaussien et moyenne zero, pour obtenir une robustesse de la solution par rapport à ce bruit, on résout le du problème suivant par la méthode des moindres carrés :

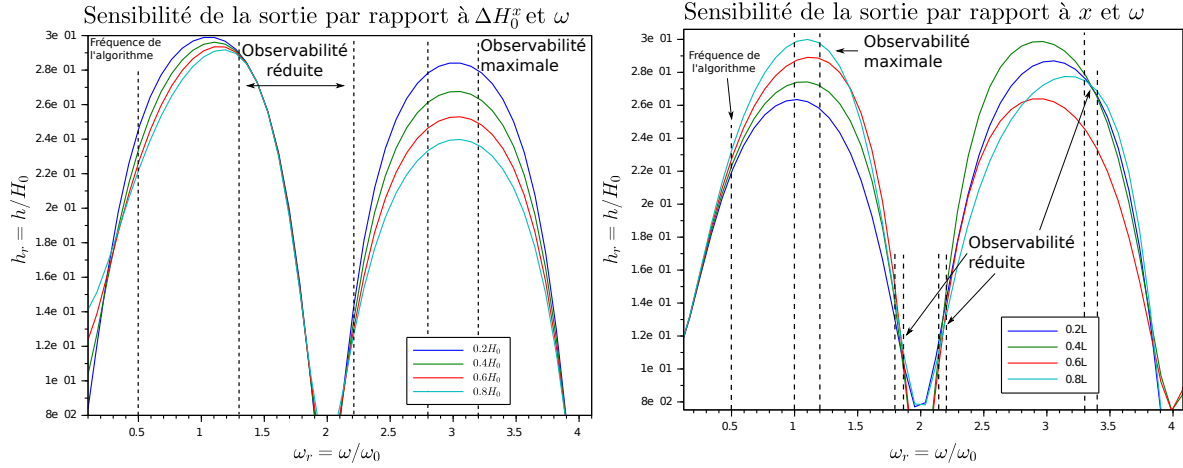


FIGURE 6.22 – Sensibilité de la pression à l’amont de la vanne pour différentes tailles et positions d’obstructions

$$\min_{\xi} \left\| \begin{bmatrix} F_1(\xi) \\ \vdots \\ F_N(\xi) \end{bmatrix} \right\| \quad (6.25)$$

En sachant que :

$$\begin{aligned} 0 < \xi_7 < A \\ 0 < \xi_8 < L \end{aligned}$$

Si on connaît la matrice de covariance du bruit pour chaque mesure de la sortie,  $W$ , alors on peut utiliser cette information pour obtenir la solution optimale par rapport à ce bruit [91] :

$$\min_{\xi} \begin{bmatrix} F_1(\xi) \\ \vdots \\ F_N(\xi) \end{bmatrix}^T W^{-1} \begin{bmatrix} F_1(\xi) \\ \vdots \\ F_N(\xi) \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

Un autre problème qui peut nuire à la détection de l’obstruction ou de la fuite est le frottement dans la canalisation. Jusqu’à présent dans la littérature le coefficient de frottement est toujours considéré nul. Dans notre approche, le coefficient de frottement peut être différent de zéro, par contre il faut trouver une bonne excitation persistante pour atténuer l’effet du frottement et garantir une bonne détection et localisation du défaut.

**Remarque 6.1.** *L’effet du frottement peut être atténué en augmentant la fréquence d’excitation.*

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_{max}} \mu = \frac{w}{a} \sqrt{j \frac{gAR}{w} - 1} \simeq \frac{w_{max}}{a} \sqrt{-1} \quad (6.27)$$

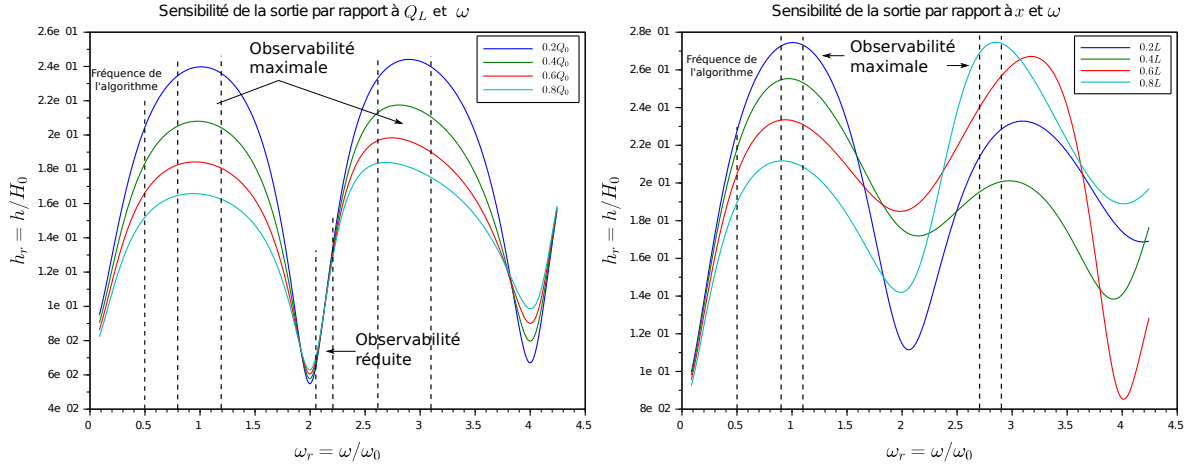


FIGURE 6.23 – Sensibilité de la pression à l'amont de la vanne pour différentes tailles et positions de fuites

La figure 6.24 illustre les pressions relatives ( $h_r = h_4^L/H_0$ ) par rapport à la fréquence d'excitation relative ( $w_r = w/w_n$ ) du système pour 6 positions d'obstruction différentes et un frottement  $f = 0$ . On peut apprécier les fréquences pour les quelles l'observabilité est maximale et minimale, ainsi que les effets du coefficient de frottement sur les réponses, avec une zone de meilleure détection en présence de frottement. Un autre effet dû au frottement est la perte d'amplitude de pression avec l'éloignement de l'obstruction par rapport à la mesure, et pour avoir des meilleures performances de détection une méthode serait d'augmenter l'amplitude de l'excitation, ou de placer une autre vanne à l'amont de la canalisation, et obtenir de ce fait (par superposition) la réponse à une double excitation. Dans les prochaines sections on verra en détails la double excitation pour détecter des obstructions étendues et détecter simultanément une obstruction et une fuite.

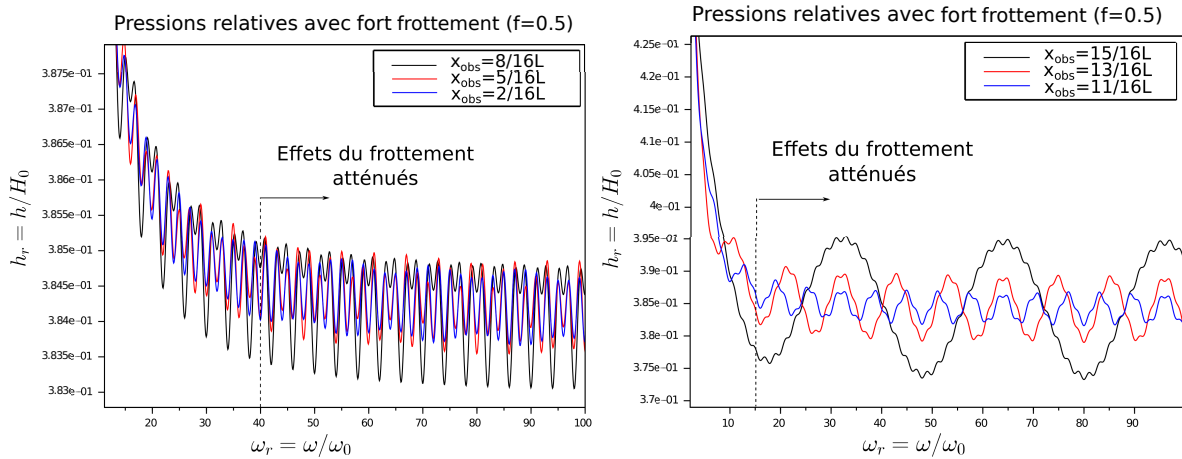


FIGURE 6.24 – Pressions à l'amont de la vanne pour un coefficient de frottement  $f = 0.5$

Pour simplifier la résolution de l'algorithme, on peut transformer le problème (6.24) avec

8 équations en un nouveau problème plus simple, où il faut trouver le zéro d'une fonction à 2 paramètres seulement puis évaluer les 6 autres équations de façon linéaire. On commence par ré-écrire le problème (6.24) avec une nouvelle notation qui sera plus pratique pour la suite :

$$0 = \begin{bmatrix} U \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_1^L + Eu - \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_3^L \\ V \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_2^L + Eu - \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_3^L \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

avec les matrices  $U = P_L F_{L-x_D} P_D F_{x_D}$ ,  $E = P_L^u$  et  $V = P_L$ , et la notation  $U_{(1,1)}$  pour l'élément de  $U$  dans la position (1,1). Les paramètres inconnus de  $\xi$  peuvent se déduire facilement à partir des équations suivantes en fonction du défaut :

$$\begin{aligned} q_1^L &= \frac{h_3^L - U_{(2,2)} h_1^L - E_{(2,1)} u}{U_{(2,1)}} \\ q_3^L &= U_{(1,1)} q_1^L + U_{(1,2)} h_1^L - E_{(1,1)} u \\ h_2^R &= \frac{h_3^L - \frac{V_{(2,1)}}{V_{(1,1)}} q_3^L + \frac{V_{(2,1)}}{V_{(1,1)}} E_{(1,1)} u - E_{(2,1)} u}{(V_{(2,2)} - \frac{V_{(2,1)} V_{(1,2)}}{V_{(1,1)}})} \end{aligned} \quad (6.29)$$

Donc comme mentionné avant, on remarque qu'il faut juste résoudre un problème non linéaire  $2 \times 2$  pour trouver le défaut, pour le cas d'une obstruction :

$$G_u(\Delta H_0, x_D) = h_2^R - g_u(\Delta H_0, x_D) = 0 \quad (6.30)$$

et pour le cas d'une fuite :

$$G_u(Q_L, x_D) = h_2^R - g_u(Q_L, x_D) = 0 \quad (6.31)$$

Avec l'information du défaut le dernier débit à trouver du vecteur  $\xi$  peut se calculer directement à partir de cette équation :

$$q_2^R = \frac{q_3^L - V_{(1,2)} h_3^L - E_{(1,1)} u}{V_{(1,1)}} \quad (6.32)$$

Pour finaliser, on peut montrer à partir de simulations la forme de la fonction  $G_u$  pour voir le minimal global et les minimaux locaux. Les résultats obtenus pour chaque défaut sont très similaires et dans ce manuscrit on ne montrera que le cas pour une obstruction.

Pour cela on évalue la fonction de coût  $G_u(\Delta H_0, x)$ , Eqs.(6.30), avec les paramètres du tableau 4.3 pour une obstruction de  $A/A_0 = 0.5$ , à la position  $x_{obs} = 0.6875L$  et pour deux fréquences  $\omega = 0.5\omega_n$  et  $\omega = 3.5\omega_n$ . La figure 6.25 montre les superficies générées par la fonction  $G_u(\Delta H_0, x)$  lorsqu'elle est évaluée sur plusieurs tailles et positions de l'obstruction possibles, la valeur plus petite obtenue devrait correspondre à la fonction avec les paramètres réels de l'obstruction.

Pour une meilleure visualisation, on propose une vue verticale de la figure 6.25, générant des courbes en différentes nuances de gris, illustrée dans la figure 6.26, plus le gris est foncé plus

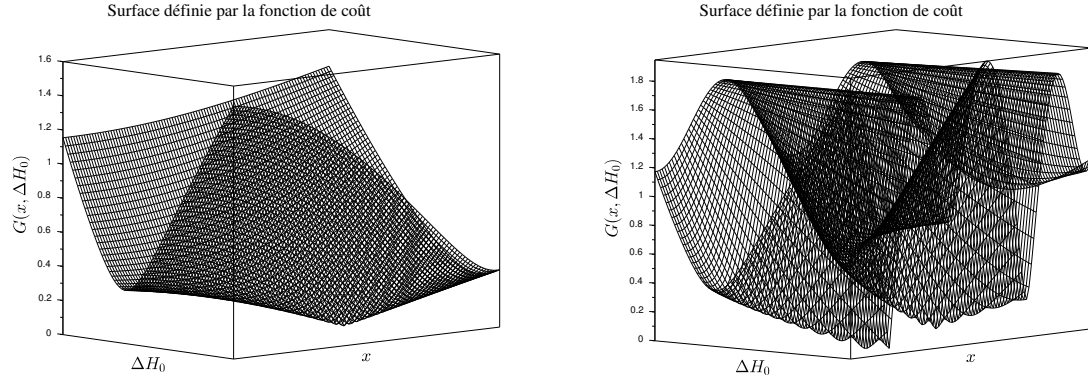


FIGURE 6.25 – Surface de la fonction coût en fonction de la taille et la position d’une obstruction.

la valeur de la fonction est petite. On peut voir que pour une très basse fréquence la courbe paraît être convexe alors que pour une fréquence plus haute il existe plusieurs minimaux locaux (comme illustré dans la figure 6.27). Dans les deux cas on peut voir qu’il existe apparemment un minimal global.

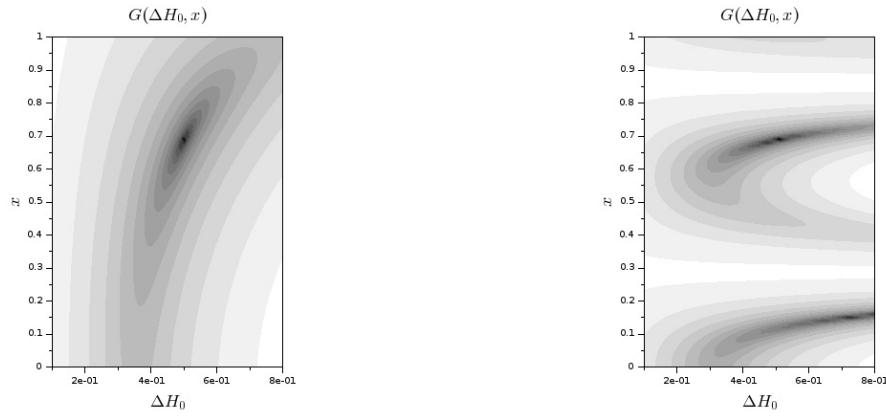


FIGURE 6.26 – Vues verticales de la figure 6.25, plus le gris est foncé plus petite est la valeur de la fonction

Indépendamment de la fréquence choisie, le problème d’optimisation reste assez mal conditionné car la fonction de coût est non-différentiable sur le point du minimum global. La figure 6.28 montre les valeurs de la fonction de coût pour différentes positions d’une obstruction en supposant la taille de celle-ci connue. Pour le cas simulé, le minimum global se trouve à  $x = 0.6875$  et on peut apprécier la non-différentiabilité de la fonction. Ceci implique que pour résoudre le problème d’optimisation (6.25) le solveur ne doit pas utiliser des algorithmes type quasi-Newton ou gradient conjugué.

Maintenant, en supposant que la sortie est corrompue par du bruit - blanc, gaussien et

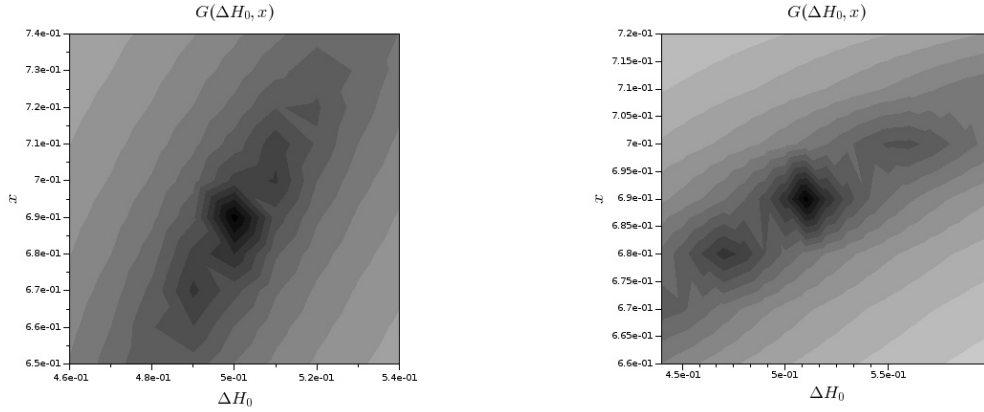


FIGURE 6.27 – Zoom de la figure 6.26 autour du minimal global, on peut voir apparaître les minimaux locaux.

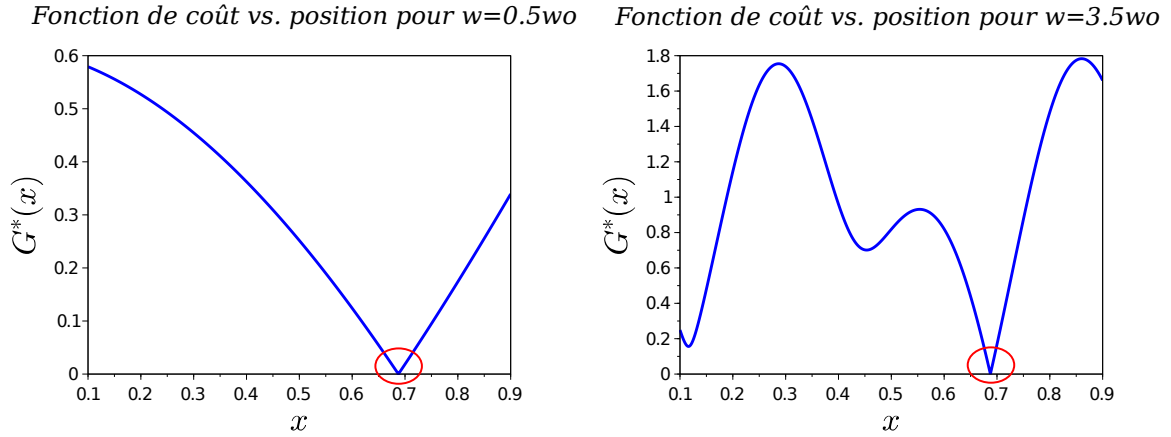


FIGURE 6.28 – Valeurs de la fonction  $G^*(x)$  par rapport à la position de l'obstruction en supposant la taille connue, on remarque que la fonction n'est pas différentiable sur le minimal.

de moyenne nulle - on montre dans la table 6.5 les erreurs relatives maximales en pourcentage après plusieurs simulations avec différentes amplitudes de bruit et différentes fréquences d'excitation. Les fréquences sont fixées à  $\omega_r = 0.5\omega_0$  ou sont variables à partir de  $0.1\omega_0$  jusqu'à  $4\omega_0$ . On remarque que l'erreur est bien plus petite lorsque la fréquence d'excitation varie pour chaque mesure, dans le cas d'identification de systèmes linéaires on peut démontrer cette amélioration de la robustesse par rapport aux bruit avec la variation de la fréquence.

Dans la suite, on montre une technique pour détecter et localiser une obstruction étendue.

### 6.3.2 Détection et localisation d'une obstruction étendue

A présent l'objectif est de estimer et localiser une obstruction étendue, c'est à dire qu'une section de la canalisation va avoir une aire transversale et un coefficient de frottement différents

Bruit	Nombre de mesures	Erreur maximum	Type de fréquences
1%	40	0.5%	Fixes
10%	40	6%	Fixes
1%	400	0.05%	Fixes
10%	400	2%	Fixes
1%	40	0.05%	Variables
10%	40	1%	Variables
1%	400	0.01%	Variables
10%	400	0.2%	Variables

TABLE 6.5 – Robustesse au bruit en fonction de l'excitation

par rapport aux valeurs nominales.

Une obstruction étendue peut être caractérisée par 4 paramètres, la distance entre le début de l'obstruction et le début de la canalisation, nommé  $x_{obs}$ , la moyenne de son aire transversale,  $A_b$ , sa longueur  $l_0$  et la moyenne de son coefficient de frottement tout au long de l'obstruction.

Avec la méthode décrite précédemment, on ne pouvait estimer que deux paramètres à partir de la mesure à l'amont de la vanne. Pour l'appliquer au cas d'obstruction étendue, on utilise une deuxième vanne à l'amont de la canalisation et on rajoute la mesure de la pression à l'aval de celle-ci. Le schéma avec tous les éléments - deux sections avec aire transversale nominale, une section avec une aire transversale réduite, deux vannes et un réservoir- est illustré dans la figure 6.29.

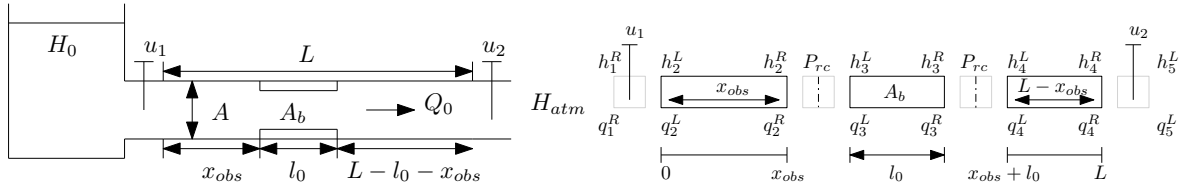


FIGURE 6.29 – Croquis et schéma pour la détection d'une obstruction étendue.

Pour créer le modèle on utilise les matrices de transfert d'une section de canalisation et les matrices de raccordement d'une vanne et d'une jonction de canalisation. Étant donné que les fonction de transfert sont linéaires on peut calculer les variations de pressions et de débits en utilisant le principe de superposition : on calcule en premier toutes les variations avec une vanne excitant le système, par exemple la vanne à l'amont avec une fréquence  $\omega_1$ , une amplitude  $u_1$  et la vanne à l'aval se comporte comme une obstruction ponctuelle, et puis on excite avec la deuxième vanne avec une fréquence  $\omega_2$  et une amplitude  $u_2$ . Les fréquences et amplitudes d'excitation peuvent être identiques, la méthodologie reste valable pour ce cas. Les variations sous les effets des deux vannes seront la somme des variations obtenues à partir de l'excitation de chaque vanne. Les équations correspondantes sont détaillées ci-dessous, en commençant premièrement par la vanne à l'amont, donc :

$$\omega = \omega_1, \quad u_1 \neq 0, \quad u_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_5^{L,\omega_1} &= P_{ovb1} F_{(L-x_{obs}-l_0)}^{\omega_1} P_{rc} F_b^{\omega_1} P_{rc} F_{x_{obs}}^{\omega_1} P_{ova1} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_1^{L,\omega_1} + P_{ova2} u_1 \\
\begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_2^{L,\omega_1} &= P_{ova1} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_1^{R,\omega_1} + P_{ova2} u_1
\end{aligned} \tag{6.33}$$

avec les matrices  $P_{ova1}$  et  $P_{ova2}$  pour la vanne à l'amont,  $P_{ovb1}$  et  $P_{ovb2}$  pour la vanne à l'aval,  $F_i$  pour les sections de la canalisation,  $P_{rc}$  la matrice de raccordement. Dans un deuxième temps on calcule les variations avec seulement la vanne à l'aval :

$$\omega = \omega_2, \quad u_1 = 0, \quad u_2 \neq 0$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_5^{L,\omega_2} &= P_{ovb1} F_{(L-x_{obs}-l_0)}^{\omega_2} P_I F_b^{\omega_2} P_I F_{x_{obs}}^{\omega_2} P_{ova1} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_1^{L,\omega_2} + P_{ovb2} u_2 \\
\begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_5^{L,\omega_2} &= P_{ovb1} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_4^{R,\omega_2} + P_{ovb2} u_2
\end{aligned} \tag{6.34}$$

Les conditions de frontière sont données par le réservoir et l'atmosphère, ce qui implique :

$$\begin{aligned}
h_1^{R,\omega_1} &= 0, \quad h_1^{R,\omega_2} = 0, \\
h_5^{L,\omega_1} &= 0, \quad h_5^{L,\omega_2} = 0
\end{aligned}$$

D'autre part la mesure est la somme des variations, mais comme ces variations sont purement sinusoïdales on peut les séparer par fréquence et obtenir :

$$y^{\omega_1} = \begin{pmatrix} h_2^{L,\omega_1} \\ h_4^{R,\omega_1} \end{pmatrix}, \quad y^{\omega_2} = \begin{pmatrix} h_2^{L,\omega_2} \\ h_4^{R,\omega_2} \end{pmatrix} \tag{6.35}$$

Pour trouver la valeur des paramètres de l'obstruction étendue on cherche le zéro d'une fonction  $F(\xi)$  avec le vecteur  $\xi$  :

$$\begin{aligned}
\xi &= [Re(q_1^{R,\omega_1}), Im(q_1^{R,\omega_1}), Re(q_2^{L,\omega_1}), Im(q_2^{L,\omega_1}), \\
&\quad Re(q_5^{L,\omega_1}), Im(q_5^{L,\omega_1}), Re(q_1^{R,\omega_2}), Im(q_1^{R,\omega_2}), \\
&\quad Re(q_2^{L,\omega_2}), Im(q_2^{L,\omega_2}), Re(q_5^{L,\omega_2}), Im(q_5^{L,\omega_2}), \\
&\quad \Delta H_0, x_{obs}, f_1, l_0]
\end{aligned}$$

et la fonction  $F(\xi)$  :



$$F(\xi) = \begin{bmatrix} P_{ovb1} F_{(L-x_{obs}-l_0)}^{\omega_1} P_I F_b^{\omega_1} P_I F_{x_{obs}}^{\omega_1} P_{ova1} \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_1^{R,\omega_1} + P_{ova2} u_1 - \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_5^{L,\omega_1} \\ P_{ova1} \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_1^{R,\omega_1} + P_{ova2} u_1 - \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_2^{L,\omega_1} \\ P_{ovb1} F_{(L-x_{obs}-l_0)}^{\omega_2} P_I F_b^{\omega_2} P_I F_{x_{obs}}^{\omega_2} P_{ova1} \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_5^{L,\omega_2} + P_{ovb2} u_2 - \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_1^{R,\omega_2} \\ P_{ova2} \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_4^{R,\omega_2} + P_{ovb2} u_2 - \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_5^{R,\omega_2} \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

et les contraintes respectives :

$$\begin{aligned} 0 &< \xi_{13} \leq A \\ 0 &< \xi_{14} < L \\ 0 &\leq \xi_{15} \\ 0 &\leq \xi_{16} < L \end{aligned} \quad (6.37)$$

Comme pour le cas détection d'une obstruction ponctuelle, on améliore l'algorithme en incluant une robustesse au bruit - blanc, gaussien et avec une moyenne nulle- additif aux mesures en utilisant plusieurs mesures obtenues pour des différentes fréquences d'excitations, créant un vecteur de fonction qui doit être minimisé. Si les valeurs de covariances du bruit de chaque mesure sont connues, sous la forme de la matrice  $W$ , on peut les inclure dans l'optimisation, et dans le cas contraire on définit  $W$  égale à la matrice identité. Pour  $N$  expériences on obtient :

$$\min_{\xi} \begin{bmatrix} F_1(\xi) \\ \vdots \\ F_N(\xi) \end{bmatrix}^T W^{-1} \begin{bmatrix} F_1(\xi) \\ \vdots \\ F_N(\xi) \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

avec les mêmes contraintes :

$$\begin{aligned} 0 &< \xi_{v,13} \leq A \\ 0 &< \xi_{v,14} < L \\ 0 &\leq \xi_{v,15} \\ 0 &\leq \xi_{v,16} < L \end{aligned} \quad (6.39)$$

Dans cette méthode, pour simplifier la complexité de la résolution numérique on peut transformer le problème de taille  $16 \times 16$  dans un problème  $4 \times 4$ . En utilisant un raisonnement similaire à celui utilisé pour l'obstruction ponctuelle ou une fuite, on commence par ré-écrire le problème (6.36) avec la nouvelle notation :

$$0 = \begin{bmatrix} U_1 \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_1^{R,\omega_1} + E_1 u_1 - \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_5^{L,\omega_1} \\ V_1 \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_1^{R,\omega_1} + E_1 u_1 - \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_2^{L,\omega_1} \\ U_2 \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_5^{L,\omega_2} + E_2 u_2 - \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_1^{R,\omega_2} \\ V_2 \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_4^{R,\omega_2} + E_2 u_2 - \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}_5^{R,\omega_2} \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

On peut écrire les sorties (équation 6.35) en fonction des entrées uniquement comme suit :

$$\begin{aligned} q_1^{R,\omega_1} &= \frac{h_5^{L,\omega_1} - U_{1(2,2)} h_1^{R,\omega_1} - E_{1(2,1)}}{U_{1(2,1)}} \\ h_2^{L,\omega_1} &= V_{1(2,1)} q_1^{R,\omega_1} + V_{1(2,2)} h_1^{R,\omega_1} + E_{1(2,1)} \\ q_1^{R,\omega_2} &= \frac{h_5^{L,\omega_2} - U_{2(2,2)} h_1^{R,\omega_1} - E_1}{U_{2(2,1)}} \\ q_5^{L,\omega_2} &= U_{2(1,1)} q_1^{R,\omega_2} + U_{2(1,2)} h_1^{R,\omega_2} + E_{2(1,1)} \\ h_4^{R,\omega_2} &= \frac{h_5^{L,\omega_2} - \frac{V_{2(2,1)}}{V_{2(1,1)}} (q_5^{L,\omega_2} + E_{2(1,1)}) - E_{2(2,1)}}{V_{2(2,2)} - \frac{V_{2(2,1)} V_{2(1,2)}}{V_{2(1,1)}}} \end{aligned} \quad (6.41)$$

On peut créer une nouvelle fonction  $G_{(u_1, u_2)}$ , à partir des variables mesurées et seulement fonction des paramètres de l'obstruction étendue dont il faudra trouver le zero.

$$G_{(u_1, u_2)}(y^{\omega_1}, y^{\omega_2}, \Delta H_0, x_{obs}, f_1, l_0) = \begin{bmatrix} y_1^{\omega_1} \\ y_2^{\omega_2} \end{bmatrix} - g_{(u_1, u_2)}(\Delta H_0, x_{obs}, f_1, l_0) = 0 \quad (6.42)$$

On obtient donc un problème d'une taille inférieure qui va être plus simple à résoudre. En obtenant les paramètres de l'obstruction étendue à partir de  $G_{(u_1, u_2)}$ , on obtient la valeur des matrices  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $E_1$  et  $E_2$ , puis comme toutes ces matrices sont inversibles (pour  $\omega > 0$ ), à partir de (6.40) on retrouve facilement tous les éléments du vecteur  $\xi$  et donc on a résolu le problème (6.36).

A continuation, la figure 6.30 montre la fonction de coût  $G_{u_1, u_2}$  en fonction des paramètres  $x$  et  $\Delta H_0$  en supposant que les autres paramètres sont connus ( $f_1 = 130\%f$  et  $l_0 = 5\%L$ ), les valeurs numérique de l'obstruction sont  $\Delta H_0 = 0.2$  et  $x_{obs} = 11/16L$ . D'autre part, la figure 6.31 montre les valeurs de la fonction de coût  $G_{u_1, u_2}$  en fonction de la longueur de l'obstruction  $l_0$  et en fonction du coefficient de frottement  $f_1$ . De ces figures, on peut conclure

que la sensibilité de la fonction de coût par rapport au coefficient de frottement est plus faible que la sensibilité par rapports aux autres paramètres. On laisse pour un futur travail l'étude des entrées appropriées pour augmenter la sensibilité de la fonction  $G_{u_1, u_2}$  par rapports à  $f_1$ , ainsi que la robustesse au bruit ajouté à la mesure.

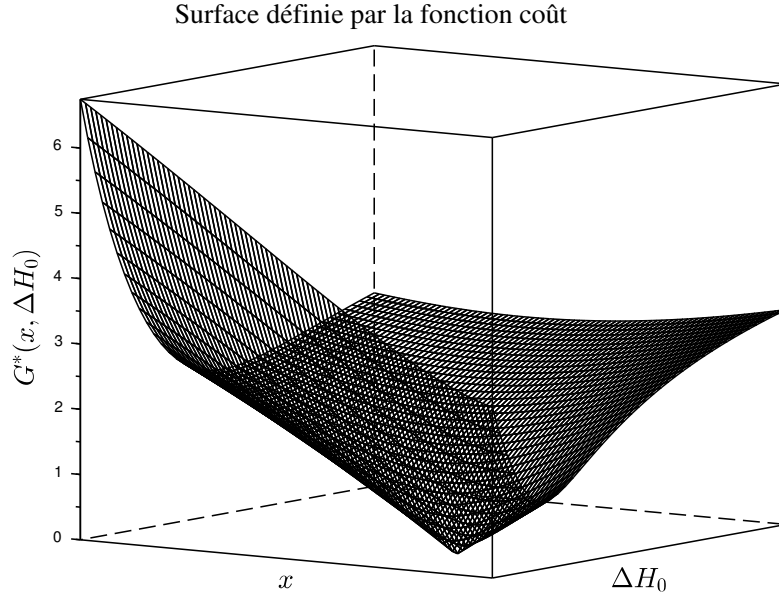


FIGURE 6.30 – Surface générée par la fonction de coût quand la longueur et le coefficient de frottement sont connus.

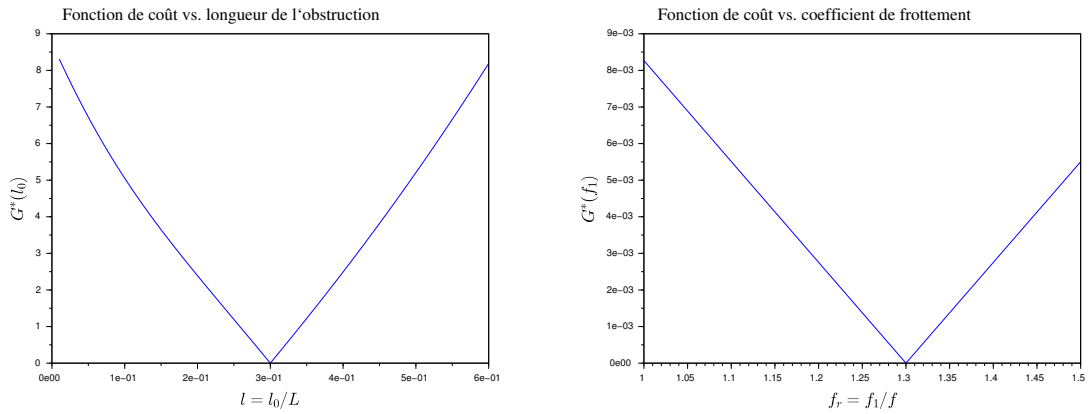


FIGURE 6.31 – Courbes de la fonction de coût pour différentes longueurs et différents coefficients de frottement.

### 6.3.3 Détection et localisation d'une obstruction ponctuelle et d'une fuite simultanément

Dans cette dernière partie, on se focalise sur la détection et localisation d'une fuite et d'une obstruction pouvant apparaître de façon simultanée. On devra donc identifier 4 paramètres, la position de la fuite et de l'obstruction et leur tailles correspondantes, nommées  $x_{obs}$ ,  $x_{fui}$ ,  $\Delta H_0$  et  $Q_L$  respectivement. On utilise une configuration de deux vannes aux extrémités de la canalisation, qui à l'amont est alimentée par un réservoir et décharge à l'aval à pression atmosphérique. La figure 6.32 montre cette configuration. On remarque qu'on peut avoir deux cas : pour le premier cas l'obstruction est à l'amont de la fuite ou le cas contraire la fuite à l'amont de l'obstruction. Par contre, dans notre approche on suppose que la position de la fuite ne peut pas être la même que la position de l'obstruction. La figure 6.33 illustre les deux cas en fonction de la position de deux défauts. Le modèle A considère que l'obstruction est à l'amont de la fuite est le modèle B le contraire.

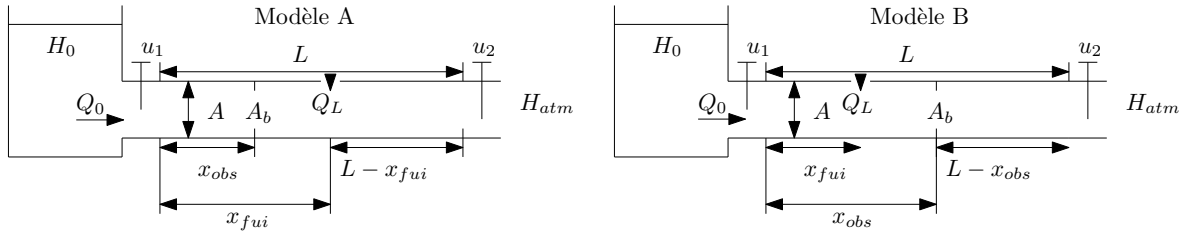


FIGURE 6.32 – Croquis d'une canalisation avec une fuite et une obstruction simultanées excitée par deux vannes oscillantes.

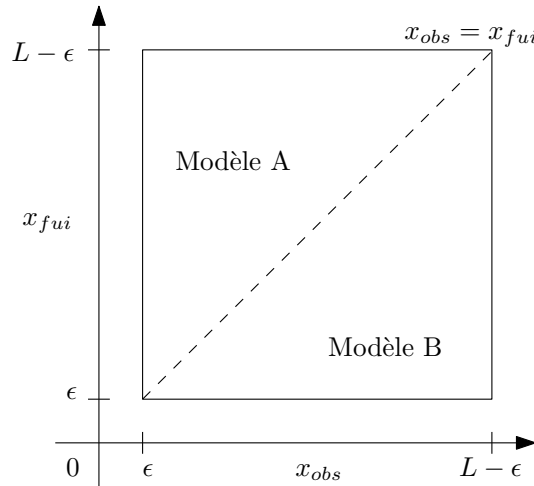


FIGURE 6.33 – Région de validité de chaque modèle, pour les deux modèles  $x_{obs} \neq x_{fui}$

En utilisant les matrices de transfert et les matrices de raccordement on peut construire les deux fonctions de transferts. Dans la figure 6.34 on peut voir la disposition des variables qui seront utilisées pour construire les deux modèles.

Pour le premier modèle, le modèle A, qui correspond à la condition  $x_{obs} < x_{fui}$  on obtient

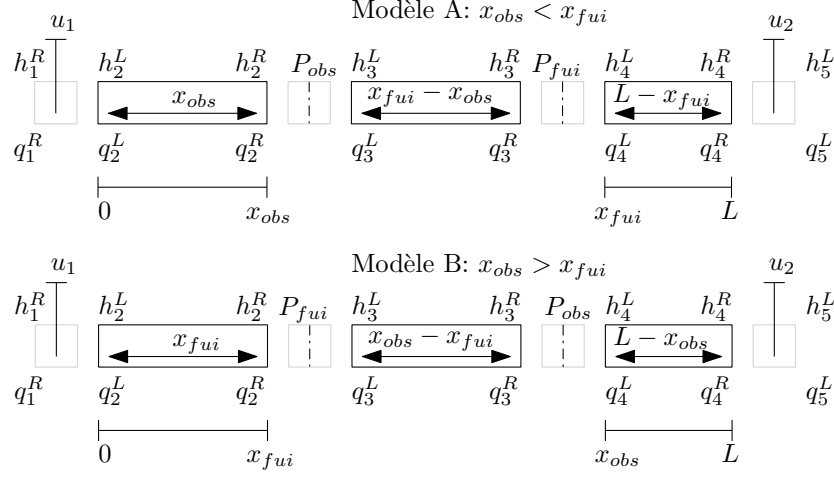


FIGURE 6.34 – Schéma des deux modèles pour la détection simultanée de fuite et obstruction.

les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_5^{L,\omega_1} &= P_{ovb1} F_{(L-x_{fui})}^{\omega_1} P_{fui} F_{(x_{fui}-x_{obs})}^{\omega_1} P_{obs} F_{x_{obs}}^{\omega_1} P_{ova1} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_1^{R,\omega_1} + P_{ova2} u_1 \\
 \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_2^{L,\omega_1} &= P_{ova1} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_1^{R,\omega_1} + P_{ova2} u_1 \\
 \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_5^{L,\omega_2} &= P_{ovb1} F_{(L-x_{fui})}^{\omega_2} P_{fui} F_{(x_{fui}-x_{obs})}^{\omega_2} P_{obs} F_{x_{obs}}^{\omega_2} P_{ova1} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_1^{R,\omega_2} + P_{ovb2} u_2 \\
 \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_5^{L,\omega_2} &= P_{ova1} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_4^{R,\omega_2} + P_{ovb2} u_2
 \end{aligned} \tag{6.43}$$

et pour le deuxième modèle, le modèle  $B$ , sous condition que  $x_{fui} < x_{obs}$ , on peut écrire les suivantes équations :

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_5^{L,\omega_1} &= P_{ovb1} F_{(L-x_{obs})}^{\omega_1} P_{obs} F_{(x_{obs}-x_{fui})}^{\omega_1} P_{fui} F_{x_{fui}}^{\omega_1} P_{ova1} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_1^{L,\omega_1} + P_{ova2} u_1 \\
 \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_2^{L,\omega_1} &= P_{ovb1} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_1^{R,\omega_1} + P_{ova2} u_1 \\
 \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_5^{L,\omega_2} &= P_{ovb1} F_{(L-x_{obs})}^{\omega_2} P_{obs} F_{(x_{obs}-x_{fui})}^{\omega_2} P_{fui} F_{x_{fui}}^{\omega_2} P_{ova1} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_1^{L,\omega_2} + P_{ovb2} u_2 \\
 \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_5^{L,\omega_2} &= P_{ovb1} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_4^{R,\omega_2} + P_{ovb2} u_2
 \end{aligned} \tag{6.44}$$

Les conditions de frontière pour les deux cas sont données par le réservoir et l'atmosphère, qui impliquent que :

$$\begin{aligned} h_1^{R,\omega_1} &= 0, & h_1^{R,\omega_2} &= 0, \\ h_5^{L,\omega_1} &= 0, & h_5^{L,\omega_2} &= 0 \end{aligned}$$

D'autre part la variable mesurée est la pression à l'aval de la première vanne et à l'amont de la deuxième, ce qui donne pour chaque fréquence les sorties :

$$y^{\omega_1} = \begin{pmatrix} h_2^{L,\omega_1} \\ h_4^{R,\omega_1} \end{pmatrix}, \quad y^{\omega_2} = \begin{pmatrix} h_2^{L,\omega_2} \\ h_4^{R,\omega_2} \end{pmatrix}$$

Donc en suivant le même raisonnement que dans les méthodes précédentes, on pose le problème de trouver le zéro de la fonction  $F(\xi)$ , avec le vecteur des variables inconnues :

$$\begin{aligned} \xi = [ & Re(q_1^{R,\omega_1}), Im(q_1^{R,\omega_1}), Re(q_2^{L,\omega_1}), Im(q_2^{L,\omega_1}), \\ & Re(q_5^{L,\omega_1}), Im(q_5^{L,\omega_1}), Re(q_1^{R,\omega_2}), Im(q_1^{R,\omega_2}), \\ & Re(q_2^{L,\omega_2}), Im(q_2^{L,\omega_2}), Re(q_5^{L,\omega_2}), Im(q_5^{L,\omega_2}), \\ & x_{fui}, x_{obs}, \Delta H_0, Q_L] \end{aligned}$$

$$F^1(\xi) = \begin{bmatrix} P_{ovb1} F_{(L-x_{fui})}^{\omega_1} P_{fui} F_{(x_{fui}-x_{obs})}^{\omega_1} P_{obs} F_{x_{obs}}^{\omega_1} P_{ova1} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_1^{L,\omega_1} + P_{ova2} u_1 - \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_5^{L,\omega_1} \\ P_{ova1} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_1^{R,\omega_1} + P_{ova2} u_1 - \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_2^{L,\omega_1} \\ P_{ovb1} F_{(L-x_{fui})}^{\omega_2} P_{fui} F_{(x_{fui}-x_{obs})}^{\omega_2} P_{obs} F_{x_{obs}}^{\omega_2} P_{ova1} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_1^{L,\omega_2} + P_{ovb2} u_2 - \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_5^{L,\omega_2} \\ P_{ova1} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_4^{R,\omega_2} + P_{ovb2} u_2 - \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_5^{L,\omega_2} \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

$$F^2(\xi) = \begin{bmatrix} P_{ovb1} F_{(L-x_{obs})}^{\omega_1} P_{obs} F_{(x_{obs}-x_{fui})}^{\omega_1} P_{fui} F_{x_{fui}}^{\omega_1} P_{ova1} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_1^{L,\omega_1} + P_{ova2} u_1 - \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_5^{L,\omega_1} \\ P_{ovb1} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_1^{R,\omega_1} + P_{ova2} u_1 - \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_2^{L,\omega_1} \\ P_{ovb1} F_{(L-x_{obs})}^{\omega_2} P_{obs} F_{(x_{obs}-x_{fui})}^{\omega_2} P_{fui} F_{x_{fui}}^{\omega_2} P_{ova1} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_1^{L,\omega_2} + P_{ovb2} u_2 - \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_5^{L,\omega_2} \\ P_{ovb1} \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_4^{R,\omega_2} + P_{ovb2} u_2 - \begin{Bmatrix} q \\ h \end{Bmatrix}_5^{L,\omega_2} \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

$$F(\xi) = \begin{cases} F^1(\xi) & \text{Si, } x_{obs} < x_{fui} \\ F^2(\xi) & \text{Si, } x_{fui} < x_{obs} \end{cases} \quad (6.47)$$

avec les contraintes :

$$\begin{aligned} 0 &< \xi_{v,13} < L \\ 0 &< \xi_{v,14} < L \\ 0 &\leq \xi_{v,15} < Q_0 \\ 0 &\leq \xi_{v,16} < H_0 \end{aligned} \quad (6.48)$$

Comme dans algorithmes précédents, l'algorithme peut être robuste à un bruit - blanc, gaussien et de moyenne nulle - additif dans les mesures en faisant plusieurs expériences et obtenant diverses mesures pour différentes fréquences. Si on connaît la matrice de covariance du bruit des mesures  $W$  on peut résoudre le problème suivant pour trouver  $\xi$ , qui sera optimal par rapport au bruit :

$$\min_{\xi} \begin{bmatrix} F_1(\xi) \\ \vdots \\ F_N(\xi) \end{bmatrix}^T W^{-1} \begin{bmatrix} F_1(\xi) \\ \vdots \\ F_N(\xi) \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

avec les contraintes :

$$\begin{aligned} 0 &< \xi_{v,13} < L \\ 0 &< \xi_{v,14} < L \\ 0 &\leq \xi_{v,15} < Q_0 \\ 0 &\leq \xi_{v,16} < H_0 \end{aligned} \quad (6.50)$$

D'autre part ce problème a une structure similaire au problème d'identifier et localiser une obstruction étendue qui permet de le ré-écrire sous forme (6.40). La taille du problème peut donc être réduite, comme pour le cas précédent, à trouver le zéro d'une fonction  $G_{(u_1, u_2)}(y^{\omega_1}, y^{\omega_2}, x_{fui}, x_{obs}, \Delta H_0, Q_L)$ , ce nouveau problème a une taille  $4 \times 4$ .

Pour finaliser cette section on propose une illustration de la fonction de coût  $G_{(u_1, u_2)}$  en deux parties, figure 6.35. Dans la première on considère que les paramètres de l'obstruction sont connus ( $\Delta H_0 = 0.4$  et  $x_{obs} = 3/16L$ ), puis dans la deuxième, sont connus les paramètres de la fuite ( $Q_L = 0.2$  et  $x_{fui} = 11/16L$ ). On peut voir clairement le changement abrupte dans les surfaces de la fonction de coût causé par le changement de modèle, ce qui rend difficile la résolution du problème, mais qui finalement permet de résoudre le problème de détection et localisation simultané d'une fuite et d'une obstruction.

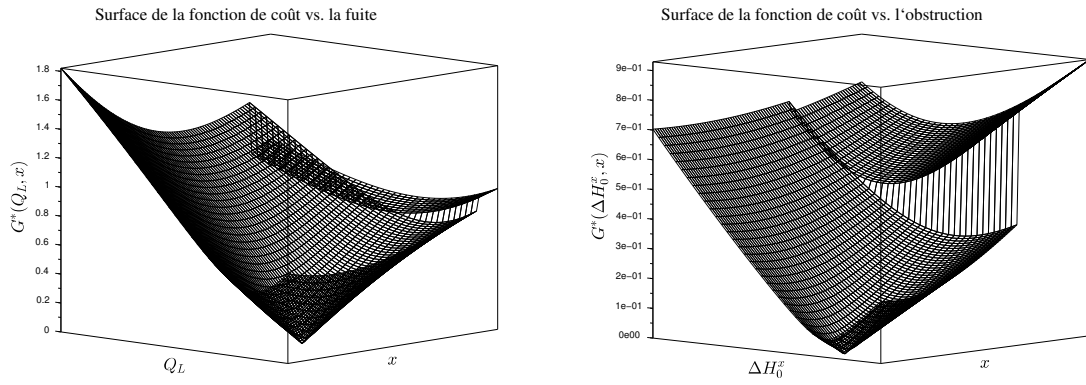


FIGURE 6.35 – Surfaces générées par la fonction de coût à minimiser en supposant les paramètres de la fuite ou de l'obstruction connus

## 6.4 Surveillance à partir du modèle discrétisé plus précis

Dans cette section, on présente une méthodologie de surveillance d'une canalisation à partir du modèle en différences finies développé dans le chapitre 5. Le modèle est obtenu par une discrétisation de deuxième ordre, l'avantage de ce modèle est la possibilité d'intégrer les équations non-linéaires du coup de bélier, de l'obstruction et de la vanne.

En utilisant les mêmes configurations que dans la section précédente, c'est à dire une canalisation alimentée par un réservoir avec une vanne à l'amont et une vanne à l'aval, comme montré dans la figure 6.36, on pourra détecter une fuite et une obstruction simultanément et une obstruction étendue.

On présente la méthode avec une application à la détection d'une obstruction et on n'utilisera que la vanne à l'aval comme excitation du système. Les autres défauts peuvent se détecter en modifiant juste le modèle mais la méthode reste la même.



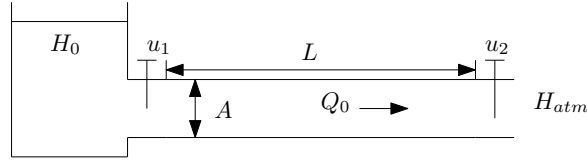


FIGURE 6.36 – Schéma de la configuration pour la détection de défauts.

Le modèle se construit avec deux sections de canalisation de longueur  $x_{obs}$  et  $L - x_{obs}$ , une obstruction à la position  $x_{obs}$  et une vanne à l'aval qui décharge à pression atmosphérique. Le point d'opération de la canalisation est donné par la pression constante à l'amont, nommé  $H_{res}$ , généré par un réservoir de volume suffisamment grand pour que son niveau d'eau se maintienne constant. À partir de cette pression et d'une ouverture de référence de la vanne  $U_0$ , un débit  $Q_0$  est fixé dans la canalisation.

Pour simplifier le problème, la détection et l'estimation de la taille de l'obstruction peuvent s'obtenir à partir des conditions en régime permanent, la technique est détaillée par les équations (6.18) et (6.17). Au point d'opération, avec les conditions limites constantes, le modèle simple (2 sections) utilisé représente assez bien le modèle réel. Par contre pour estimer la position on a vu qu'il faut garantir une entrée persistante pour pouvoir observer la position et pour ce cas, il faut un nouveau modèle.

Le nouveau modèle avec une obstruction, est implicite dans le temps et s'écrit de la forme :

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}, x_n, u_n)_{obs} &= 0 \\ y_n &= Cx_n \end{aligned} \quad (6.51)$$

où  $obs$  se réfère à l'obstruction avec une taille  $(A/A_0)$  et une position  $x_{obs}$ .

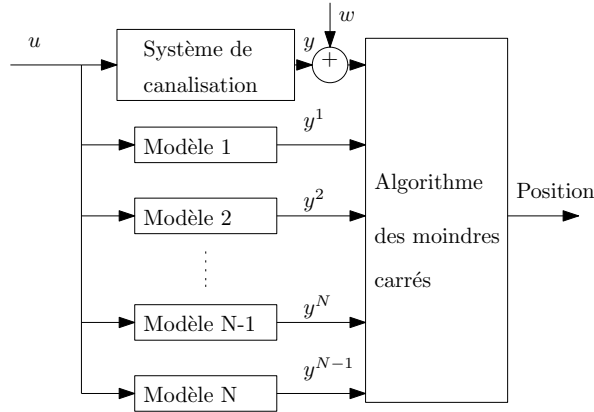


FIGURE 6.37 – Schéma de l'algorithme de localisation d'obstruction.

La méthodologie consiste à comparer la sortie du système réel avec un ensemble de sorties générées, à partir de la même entrée, mais avec différentes valeurs de positions. La sortie avec le moins d'erreur correspond au modèle avec une certaine position qui va être la plus proche de la position réelle.

Les mesures de la sortie du système sont considérées corrompues par du bruit blanc, gaussien et avec une moyenne nulle avec une matrice de covariance  $W$ . Le schéma de la méthodologie est illustré dans la figure 6.37. En utilisant la méthode des moindres carrés, on peut résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\min_{x_{obs}} (y_i - f(x_{obs}))^T W^{-1} (y_i - f(x_{obs}))$$

où  $y_i$  représentent les composantes au temps  $i$  de la sortie du système réel et  $f(x_{obs})$  est la sortie du modèle avec une obstruction à la position  $x_{obs}$ .

La figure 6.38 montre la fonction coût des moindres carrés par rapport à différentes positions avec une excitation sinusoïdale. 16 positions ont été considérées, les paramètres du système sont détaillés dans la table 6.1. On peut bien voir que les courbes ont leur minimum sur les positions correspondant au cas réel.

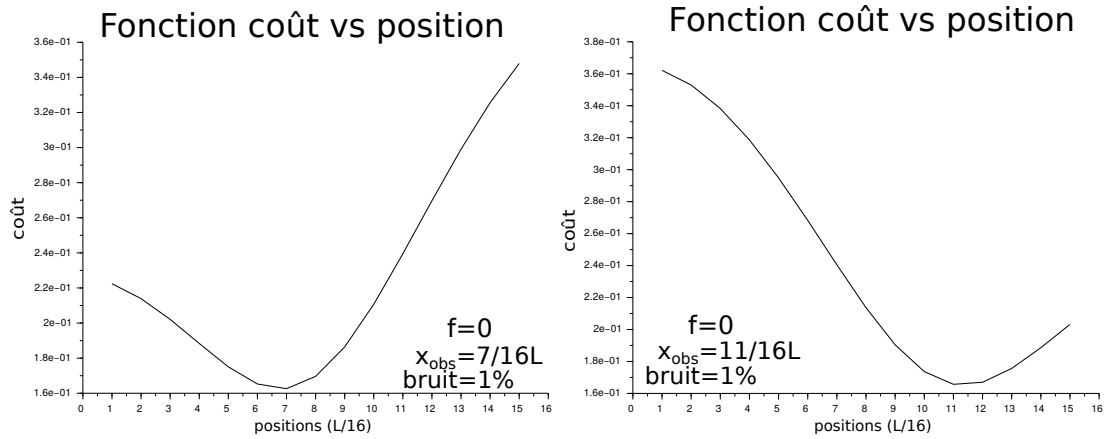


FIGURE 6.38 – Fonction coût des moindres carrés par rapport à différentes positions.

Dans la figure 6.39 l'effet du frottement a été ajouté, on obtient bien le minimum de la fonction de coût sur la position correcte mais la robustesse au bruit de sortie se voit diminué. Il faudrait augmenter l'amplitude d'excitation ou choisir une entrée plus persistante pour atténuer les effets du bruit.

## 6.5 Conclusions

Dans ce chapitre, plusieurs techniques de détection de défaut on été exposées.

Premièrement on a présenté une méthodologie pour la surveillance d'une fuite ainsi que le point de fonctionnement de la pompe à l'amont de la canalisation. Ces méthodologie sont basées sur des modèles simples et des observateurs d'état. Pour garantir l'observabilité, les algorithmes développés dans la première partie de ce manuscrit ont été appliqués.

Sur cette base, toujours en utilisant des modèles simples, des techniques de détection et

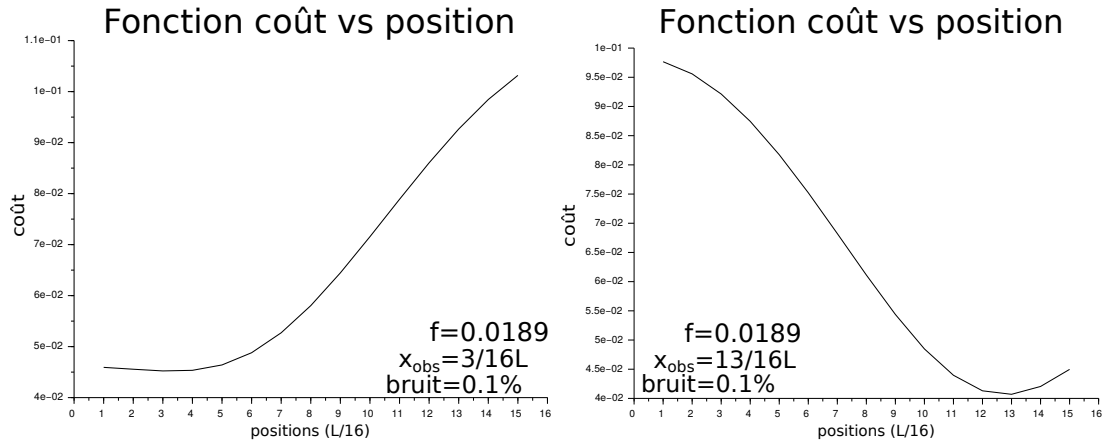


FIGURE 6.39 – Fonction coût des moindres carrés par rapport à différentes positions.

localisation d'obstruction ont été proposés. Mais pour le cas d'une obstruction ces simples modèles introduisent des erreurs de modèle qui rendent impossible la tâche de surveillance.

Pour cela, dans un deuxième temps, on a développé plusieurs techniques de surveillance de défaut dans une canalisation, basées sur des modèles fréquentiels sous contrainte d'une excitation sinusoïdale du système. On veut insister sur le fait que ces approches sont innovatrices ainsi que les résultats obtenus sont très intéressants et proposent des nouvelles perspectives dans le domaine de la surveillance de défaut dans un pipeline sous excitation sinusoïdale.

Finalement on a étendu ces approches au cas d'une excitation qui n'est pas forcément sinusoïdale en utilisant un nouveau modèle en différences finies implicites développé au chapitre 5. Toutes ces méthodes ont été programmées et testées en simulation, puis illustrées dans différentes figures, donnant des résultats très prometteurs. Une validation expérimentale de l'ensemble de ces techniques reste encore en perspective.

# Conclusions générales et Perspectives

Ce chapitre final vise, d'une part, à synthétiser le travail présenté dans cette thèse, et d'autre part à donner les perspectives pour un futur travail d'approfondissement des sujets résumés ci-dessous.

Les contributions de cette thèse se divisent en deux grandes parties. Premièrement on a développé des algorithmes pour la conception d'entrées optimales et persistantes pour des systèmes non-uniformément observables, et deuxièmement on a étudié l'utilisation de techniques d'observation pour la détection et la localisation de défauts dans les pipelines.

Pour la première partie, les contributions peuvent être résumées de la façon suivante : partant du constat que le grammien d'observabilité permet de quantifier l'observabilité d'un système, une première stratégie pour l'obtention de "bonnes entrées" pour l'observation a été de chercher des commandes par optimisation directe du grammien. Dans ce cadre, une première approche a été proposée pour garantir un grammien défini positif sur une fenêtre de longueur fixe, et glissante dans le temps, pour les systèmes affines en l'état, permettant un calcul complètement hors-ligne. Une deuxième approche a alors été introduite pour aussi prendre en compte les systèmes affines en l'état avec injection de la sortie, mais nécessitant cette fois un calcul en ligne.

La stratégie a ensuite été étendue au calcul d'entrée directement en fonction d'équation d'observateur, transformant le problème de choix d'entrée persistante en un problème de commande d'observateur. Après une formulation générale, la technique a été développée de façon approfondie dans le cas des systèmes affines en l'état, pour lesquels elle conduit à une amélioration par l'entrée, de l'observateur de Kalman optimal vis-à-vis des bruits, incluant une présentation complète de l'algorithme d'optimisation.

Dans chaque cas, des exemples illustratifs ont été présentés, mais les applications ont été plus spécialement développées dans la seconde partie du manuscrit, autour de l'enjeu de la surveillance de de canalisation sous pression, notamment face aux fuites, obstructions et obstructions étendues.

Sur la base d'études de modélisation déjà disponibles, basés sur une discrétisation en différences finies de premier ordre, plusieurs compléments de modèle ont été proposés, avec validation expérimentale pour une part, et étude de sensibilité aux défauts d'autre part. Plusieurs algorithmes basés sur la minimisation de fonction de coût ou la synthèse d'observateurs ont alors été proposés pour détecter et localiser d'une fuite dans une canalisation avec les avantages de nécessiter deux mesures seulement.

Une approche à base du modèle fréquentiel, qui est construit en linéarisant les équations du coup de bélier et les équations des éléments associés (vanne et défauts), a permis la détection de fuite ou obstruction en utilisant seulement une seule mesure puis en utilisant deux mesures il permet d'aller jusqu'à la détection et la localisation d'une fuite et d'une obstruction

simultanées ou d'une obstruction étendue.

Un nouveau modèle temporel basé sur des différences finies de deuxième ordre et avec la difficulté d'être implicite dans le temps a été proposé pour surmonter le problème de la linéarisation nécessaire pour construire le modèle fréquentiel avec son algorithme de détection de défaut correspondant, qui se base sur une minimisation d'une fonction de coût.

En ce qui concerne les perspectives de ce travail, nous pouvons en souligner quelques-unes ici : mentionnons tout d'abord la validation expérimentale des modèles et des algorithmes de détection de défauts, qui nécessitent bien sûr les éléments adéquats dans les canalisations d'essais.

Il faudrait étudier la sensibilité des techniques proposées aux bruits ajoutés par les capteurs, ce qui peut donner lieu aux choix des capteurs à placer pour réaliser une meilleure détection.

D'autre part, l'extension aux réseaux de pipelines pourrait directement se faire à condition d'avoir toutes les mesures aux nœuds de la maille et l'excitation appropriée pour chaque trame. Il serait donc fort intéressant de poursuivre une optimisation du positionnement de capteurs et actionneurs pour minimiser le nombre de capteurs et l'énergie à dépenser pour garantir l'excitation persistante.

Pour ce qui concerne plus la première partie, il serait utile de pouvoir inclure l'adaptation du gain de l'observateur dans l'approche de conception d'entrées optimales pour améliorer l'estimation. Il faudrait aussi coupler l'optimisation de l'entrée pour l'observation à des objectifs de commande.

On peut aussi considérer le problème d'optimiser la résolution numérique des algorithmes développés dans ce travail, en utilisant les propriétés numériques des matrices creuses (sparse matrix) et de la programmation parallèle pour pouvoir augmenter les dimensions des modèles et gagner en précision numérique.

Pour simplifier les algorithmes pour garantir l'observabilité, on a choisi de travailler en temps discret, mais une extension au temps continu peut se faire en tenant compte de pénaliser la fréquence dans la fonction de coût.

# Bibliographie

- [1] N. A. ADELEKE. “Blockage detection in natural gas pipelines by transient”. Thèse de doct. The Pennsylvania State University, 2010 (cf. p. 91).
- [2] A. Y. ALLIDINA et A. BENKHEROUF. “Leak Detection and Location in Gas Pipelines”. In : *Control Theory and Applications, IEE Proceedings D* 135.2 (1988), p. 142–148 (cf. p. 57, 65).
- [3] V. ANDRIEU, G. BESANÇON et U. SERRES. “Observability necessary conditions for the existence of observers”. In : *Decision and Control (CDC), 2013 IEEE 52nd Annual Conference on*. 2013, p. 4442–4447 (cf. p. 1).
- [4] V. ANDRIEU, L. PRALY et A. ASTOLFI. “High gain observers with updated gain and homogeneous correction term”. In : *Automatica* 45.2 (2009), p. 422–428 (cf. p. 1).
- [5] V. ANDRIEU, L. PRALY et A. ASTOLFI. “Homogeneous approximation, recursive observer design, and output feedback”. In : *SIAM Journal on Control and Optimization* 47.4 (2008), p. 1814–1850 (cf. p. 1).
- [6] A. ASTOLFI et L. PRALY. “Global complete observability and output-to-state stability imply the existence of a globally convergent observer”. In : *Mathematics of Control, Signals and Systems* 18.1 (2006), p. 32–65 (cf. p. 1).
- [7] C. BECHT. *Process Piping : The Complete Guide to ASME B31.3*. The American Society of Mechanical Engineers, 2009 (cf. p. 1).
- [8] O. BEGOVICH, A. PIZANO et G. BESANÇON. “Online implementation of a leak isolation algorithm in a plastic pipeline prototype.” In : *Latin American Applied Research* 42.2 (2012), p. 131–140 (cf. p. 54, 77, 93, 104, 110).
- [9] W. E. BENJAMIN et V. STREETER. *Fluid Transient in Systems*. 1993 (cf. p. 81).
- [10] A. BERGANT, A. S. TIJSSELING, J. P. VÍTKOVSKÝ, D. I. COVAS, A. R. SIMPSON et M. F. LAMBERT. “Parameters affecting water-hammer wave attenuation, shape and timing-Part 1 : Mathematical tools”. In : *Journal of Hydraulic Research* 46.3 (2008), p. 373–381 (cf. p. 54).
- [11] A. BERGANT, A. S. TIJSSELING, J. P. VÍTKOVSKÝ, D. I. COVAS, A. R. SIMPSON et M. F. LAMBERT. “Parameters affecting water-hammer wave attenuation, shape and timing-Part 2 : Case studies”. In : *Journal of Hydraulic Research* 46.3 (2008), p. 382–391 (cf. p. 54).
- [12] G. BESANÇON et A. ȚICLEA. “An immersion-based observer design for rank-observable nonlinear systems”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 52.1 (2007), p. 83–88 (cf. p. 34).
- [13] G. BESANÇON, D. GEORGES, O. BEGOVICH, C. VERDE et C. ALDANA. “Direct observer design for leak detection and estimation in pipelines”. In : *Proceedings of European Control Conf.* Kos, Greece, 2007 (cf. p. 38, 98).

- [14] G. BESANÇON, M. GUILLEN, J. DULHOSTE, R. SANTOS et D. GEORGES. “Finite-Difference Modeling Improvement for Fault Detection in Pipelines”. In : *Proceedings 8th IFAC Symp. Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, Safe-Process*. Mexico City, Mex., 2012 (cf. p. 92).
- [15] G. BESANÇON, M. GUILLEN, J.-f. DULHOSTE, R. SANTOS et I. RUBIO SCOLA. “Pipeline partial blockage modeling and identification”. In : *Adaptation and Learning in Control and Signal Processing*. T. 11. 1. 2013, p. 730–735 (cf. p. 3, 58).
- [16] G. BESANÇON, I. RUBIO SCOLA et D. GEORGES. “Input selection in observer design for nonuniformly observable systems”. In : *9th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*. 2013 (cf. p. 3).
- [17] G. BESANÇON, I. RUBIO SCOLA, M. GUILLÉN, J.-F. DULHOSTE, R. SANTOS et D. GEORGES. “Observer-based detection and location of partial blockages in pipelines”. In : *Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol), 2013 Conference on*. IEEE. 2013, p. 694–699 (cf. p. 3).
- [18] G. BESANÇON. *Nonlinear Observers and Applications*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007 (cf. p. 1, 7, 9, 10, 12–14, 20, 34).
- [19] G. BESANÇON, G. BORNARD et H. HAMMOURI. “Observer synthesis for a class of nonlinear control systems”. In : *European Journal of Control* 2.3 (1996), p. 176–192 (cf. p. 34, 35).
- [20] L. BILLMAN et R. ISERMANN. “Leak detection methods for pipelines”. In : *Proceeding of the 8th IFAC Congress*. Budapest, Hungary, 1984, p. 1813–1818 (cf. p. 54, 91).
- [21] M. BLANKE et J. SCHRÖDER. *Diagnosis and fault-tolerant control*. T. 2. Springer, 2006 (cf. p. 1).
- [22] G. BORNARD, N. COUENNE et F. CELLE. “Regularly persistent observers for bilinear systems”. In : *New Trends in Nonlinear Control Theory*. Sous la dir. de J. DESCUSSE, M. FLIESS, A. ISIDORI et D. LEBORGNE. T. 122. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Berlin Heidelberg, 1989, p. 130–140 (cf. p. 11).
- [23] G. BORNARD, N. COUENNE et G. GILLES. “Observability and observers”. In : *Nonlinear systems - T.1, Modeling and estimation*. London : Chapman&Hall, 1995, p. 173–216 (cf. p. 1).
- [24] B. BRUNONE et M. FERRANTE. “Detecting leaks in pressurised pipes by means of transients”. In : *Journal of Hydraulic Research* 39.5 (2001), p. 539–547 (cf. p. 91).
- [25] B. BRUNONE, M. FERRANTE et S. MENICONI. “Discussion of “detection of partial blockage in single pipelines” by PK Mohapatra, MH Chaudhry, AA Kassem, and J. Moloo”. In : *Journal of Hydraulic Engineering* 134.6 (2008), p. 872–874 (cf. p. 54).
- [26] L. CASTRO-BURGOS et H. VALDÉS-GONZÁLEZ. “Leak Detection in Water Pipelines : Proposal Based on a Bank of Filters.” In : *Revista chilena de ingeniería* 17.3 (2009), p. 375–385 (cf. p. 54).
- [27] Y. CHAHLAOUI et P. VAN DOOREN. “Model reduction of time-varying systems”. In : *Dimension reduction of large-scale systems*. Springer, 2005, p. 131–148 (cf. p. 17).

- [28] M. H. CHAUDHRY. *Applied Hydraulic Transients*. Third Edition. Springer, 2014, p. 583 (cf. p. 54, 57, 60, 64, 70, 72, 73, 81, 95).
- [29] M. H. CHAUDHRY. “Resonance in pressurized piping systems”. Thèse de doct. University of British Columbia, 1970 (cf. p. 62).
- [30] J. CHEN et R. J. PATTON. *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2012 (cf. p. 1).
- [31] G. COHEN et D. L. ZHU. “Decomposition coordination methods in large scale optimization problems : The nondifferentiable case and the use of augmented Lagrangians”. In : *Advances in large scale systems* 1 (1984), p. 203–266 (cf. p. 43).
- [32] A. F. COLOMBO, P. LEE et B. W. KARNEY. “A selective literature review of transient-based leak detection methods”. In : *Journal of Hydro-environment Research* 2.4 (2009), p. 212–227 (cf. p. 1).
- [33] H. G. DÖTSCH et P. M. Van den HOF. “Test for local structural identifiability of high-order non-linearly parametrized state space models”. In : *Automatica* 32.6 (1996), p. 875–883 (cf. p. 80).
- [34] H. DUAN, P. LEE, M. GHIDAoui et J. TUCK. “Transient wave-blockage interaction and extended blockage detection in elastic water pipelines”. In : *Journal of Fluids and Structures* (2014) (cf. p. 54, 91).
- [35] P. DUFOUR, S. FLILA et H. HAMMOURI. “Observer Design for MIMO Non-Uniformly Observable Systems”. In : *IEEE Trans. Automat. Contr.* 57.2 (2012), p. 511–516 (cf. p. 34, 38).
- [36] P. DUFOUR. “Commande prédictive et identification optimale en boucle fermée”. Thèse de doct. Université Claude Bernard Lyon I, 2011 (cf. p. 2).
- [37] J. DULHOSTE, G. BESANÇON, L. TORRES, O. BEGOVICH et A. NAVARRO. “About friction modeling for observer-based leak estimation in pipelines”. In : *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on*. 2011, p. 4413–4418 (cf. p. 54).
- [38] S. ENTERPRISES. *Scilab : Free and Open Source software for numerical computation*. Scilab Enterprises. Orsay, France, 2012 (cf. p. 47, 87).
- [39] S. FLILA, P. DUFOUR, H. HAMMOURI et M. NADRI. “A combined closed loop optimal design of experiments and on-line identification control approach”. In : *Proceedings of 29th Chinese Control Conf, Beijing, China*. 2010 (cf. p. 2).
- [40] S. FLILA. “Optimal identification and predictive controller : application in chemical engineering”. Theses. Université Claude Bernard Lyon I, fév. 2010 (cf. p. 2).
- [41] M. FRANKEL. *Facility piping systems handbook*. 3rd ed. McGraw-Hill’s AccessEngineering. New York : McGraw-Hill, 2010 (cf. p. 1).
- [42] J. P. GAUTHIER, H. HAMMOURI et S. OTHMAN. “A Simple Observer for Nonlinear Systems-Applications to Bioreactors”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 37.6 (1992), p. 875–880 (cf. p. 34).
- [43] A. GELB. *Applied optimal estimation*. Rapp. tech. M.I.T., 1974 (cf. p. 13).



- [44] D. GEORGES. “The use of observability and controllability gramians or functions for optimal sensor and actuator location in finite-dimensional systems”. In : *Decision and Control, 1995., Proceedings of the 34th IEEE Conference on*. T. 4. 1995, 3319–3324 vol.4 (cf. p. 12).
- [45] D. GEORGES. “Optimal location of mobile sensors for environmental monitoring”. In : *Control Conference (ECC), 2013 European*. IEEE. 2013, p. 1280–1285 (cf. p. 12).
- [46] M. S. GHIDAoui, D. A. McINNis, D. H. AXWORTHY et M. ZHAO. “A review of water hammer theory and practice”. In : *Applied Mechanics Reviews* 58.1 (2005), p. 49–76 (cf. p. 54).
- [47] M. GUILLÉN, J. DULHOSTE, G. BESANÇON et R. SANTOS. “Study of a flow model for detection and location of leaks and obstructions in pipes”. In : *Proceedings of 9th International Conference on Modeling, Optimization and SIMulation*. Bordeaux, France, 2012 (cf. p. 54, 78).
- [48] M. GUILLÉN, J.-F. DULHOSTE, G. BESANÇON, I. RUBIO SCOLA, R. SANTOS et D. GEORGES. “Leak Detection and Location Based on Improved Pipe Model and Nonlinear Observer”. In : *Proceedings of the ECC 2014*. Strasbourg, France, 2014 (cf. p. 3).
- [49] M. GUILLÉN, J.-F. DULHOSTE, R. SANTOS, G. BESANÇON, I. RUBIO SCOLA et al. “Deteccion y localizacion de fugas basado en observadores utilizando un modelo de tuberia mejorado”. In : *Congreso Iberoamericano de Ingenieria Mecanica*. 2013 (cf. p. 3).
- [50] M. GUILLÉN, J.-F. DULHOSTE, R. SANTOS, I. RUBIO SCOLA, G. BESANÇON, D. GEORGES et al. “Modelo dinámico para la detección y localización de obstrucciones parciales en tuberías”. In : *Congreso Internacional de Métodos Numéricos en Ingenieria y Ciencias Aplicadas*. 2014 (cf. p. 3).
- [51] H. HAMMOURI et M. FARZA. “Nonlinear Observers for locally Uniformly observable systems”. In : *ESAIM : Control, optimisation and calculus of Variations* 9 (2003), p. 353–370 (cf. p. 1).
- [52] H. HAMMOURI et J. de LEON MORALES. “Observer synthesis for state-affine systems”. In : *Decision and Control, 1990., Proceedings of the 29th IEEE Conference on*. IEEE. 1990, p. 784–785 (cf. p. 1).
- [53] H. HAMMOURI et J. de LEON MORALES. “On systems equivalence and observer synthesis”. In : *New Trends in Systems Theory*. Sous la dir. de G. CONTE, A. M. PERDON et B. WYMAN. T. 7. Progress in Systems and Control Theory. Birkhäuser, 1991, p. 340–347 (cf. p. 35).
- [54] H. HAMMOURI et M. NADRI. “An observer design for a class of implicit systems”. In : *Systems & Control Letters* 62.3 (2013), p. 256–261 (cf. p. 1).
- [55] H. HAMMOURI, H. G. VU et H. YAHOUi. “Local observer for infinitesimally observable nonlinear systems”. In : *International Journal of Control* 86.4 (2013), p. 579–590 (cf. p. 1).

- [56] R. ISERMANN. *Fault-diagnosis applications : model-based condition monitoring : actuators, drives, machinery, plants, sensors, and fault-tolerant systems*. Springer, 2011 (cf. p. 1).
- [57] R. E. KALMAN et R. S. BUCY. “New results in linear filtering and prediction theory”. In : *Journal of Basic Engineering* 82.D (1960), p. 35–40 (cf. p. 10, 13).
- [58] R. E. KALMAN. “A new approach to linear filtering and prediction problems”. In : *Journal of Fluids Engineering* 82.1 (1960), p. 35–45 (cf. p. 42).
- [59] H. KHALIL. *Nonlinear Systems*. 3<sup>e</sup> éd. Prentice Hall, 2001 (cf. p. 35, 36).
- [60] H. KWAKERNAAK et R. SIVAN. *Linear optimal control systems*. T. 1. Wiley-interscience New York, 1972 (cf. p. 13).
- [61] T. LI. “Observabilité exacte frontière pour des systèmes hyperboliques quasi-linéaires”. In : *Comptes Rendus Mathématique* 342.12 (2006), p. 937–942 (cf. p. 66).
- [62] T. LI. “Exact boundary controllability and observability for first order quasilinear hyperbolic systems with a kind of nonlocal boundary conditions.” In : *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 28.1 (2010), p. 243–257 (cf. p. 66).
- [63] K. LIN et K. E. HOLBERT. “Applying the equivalent pi circuit to the modeling of hydraulic pressurized lines”. In : *Mathematics and Computers in Simulation* 79.7 (2009), p. 2064–2075 (cf. p. 62).
- [64] D. G. LUENBERGER. “Observers for multivariable systems”. In : *Automatic Control, IEEE Transactions on* 11.2 (1966), p. 190–197 (cf. p. 13).
- [65] C. MASSARI, T. C. J. YEH, M. FERRANTE, B. BRUNONE et S. MENICONI. “Detection and sizing of extended partial blockages in pipelines by means of a stochastic successive linear estimator”. In : *Journal of Hydroinformatics* (2013) (cf. p. 54, 91).
- [66] C. MASSARI, T.-C. J. YEH, B. BRUNONE, M. FERRANTE et S. MENICONI. “Diagnosis of Pipe Systems by means of a Stochastic Successive Linear Estimator”. In : *Water resources management* 27.13 (2013), p. 4637–4654 (cf. p. 54).
- [67] D. MATKO, G. GEIGER et W. GREGORITZA. “Pipeline simulation techniques”. In : *Mathematics and computers in simulation* 52.3 (2000), p. 211–230 (cf. p. 54).
- [68] D. MATKO, G. GEIGER et W. GREGORITZA. “Verification of various pipeline models”. In : *Mathematics and computers in simulation* 53.4 (2000), p. 303–308 (cf. p. 54).
- [69] P. K. MOHAPATRA, M. H. CHAUDHRY, A. A. KASSEM et J. MOLOO. “Detection of Partial Blockage in Single Pipelines”. In : *Journal of Hydraulic Engineering* 132.2 (2006), p. 200–206 (cf. p. 54, 70).
- [70] P. K. MOHAPATRA et M. H. CHAUDHRY. “Frequency responses of single and multiple partial pipeline blockages”. In : *Journal of Hydraulic Research* 49.2 (2011), p. 263–266 (cf. p. 72, 91).
- [71] B. MOORE. “Principal component analysis in linear systems : Controllability, observability, and model reduction”. In : *Automatic Control, IEEE Transactions on* 26.1 (1981), p. 17–32 (cf. p. 12).

- [72] K. W. MORTON et D. F. MAYERS. *Numerical solution of partial differential equations : an introduction*. Cambridge university press, 2005 (cf. p. 59).
- [73] M. NADRI, H. HAMMOURI et R. M. GRAJALES. “Observer design for uniformly observable systems with sampled measurements”. In : *Automatic Control, IEEE Transactions on* 58.3 (2013), p. 757–762 (cf. p. 1).
- [74] A. NAVARRO, O. BEGOVICH, G. BESANÇON et J. DULHOSTE. “Real-Time Leak Isolation based on State Estimation in a Plastic Pipeline”. In : *IEEE Multi-conference on Systems and Control, Denver, USA*. 2011 (cf. p. 54).
- [75] E. A. PADILLA et O. BEGOVICH. “Real-Time Leak Isolation based on a Fault Model Approach Algorithm in a Water Pipeline Prototypes”. In : *Proceedings 8th IFAC Symp. Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, SafeProcess*. Mexico City, Mex., 2012 (cf. p. 54).
- [76] G. PEZZINGA. “Quasi-2D Model for unsteady flow in pipe networks”. In : *Journal of Hydraulic Engineering* 125.7 (1999), p. 676–685 (cf. p. 54).
- [77] J. QIAN, P. DUFOUR et M. NADRI. “Observer and model predictive control for on-line parameter identification in nonlinear systems”. In : (2013) (cf. p. 2).
- [78] H. P. REDDY, M. H. CHAUDHRY et P. K. MOHAPATRA. “Modelling of periodic flows in pipelines by transfer function method”. In : *Journal of Hydraulic Research* 48.2 (2010), p. 255–259 (cf. p. 54).
- [79] J. A. ROBERSON, J. J. CASSIDY et M. CHAUDHRY. *Hydraulic Engineering*. Houghton Mifflin Co International Inc., 1989 (cf. p. 57, 77).
- [80] I. RUBIO SCOLA, G. BESANÇON et D. GEORGES. “Input optimization for Observability of State Affine Systems”. In : *5th IFAC Symposium on Systems Structure and Control*. Grenoble, France, 2013 (cf. p. 2, 47).
- [81] I. RUBIO SCOLA, G. BESANÇON et D. GEORGES. “Online observability optimization for state affine systems with output injection and observer design”. In : *Control & Automation (MED), 2013 21st Mediterranean Conference on*. IEEE. 2013, p. 609–614 (cf. p. 3).
- [82] I. RUBIO SCOLA, G. BESANÇON, D. GEORGES, M. GUILLÉN, J.-F. DULHOSTE et R. SANTOS. “On the design of a nonlinear state observer for the location of a blockage in a pipeline”. In : *XII International Congress on Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences*. (2014) (cf. p. 3).
- [83] I. RUBIO SCOLA, G. BESANÇON, D. GEORGES, M. GUILLÉN, J.-F. DULHOSTE, R. SANTOS et al. “Sensitivity analysis of end pressures and flows with respect to a blockage inside a pipeline.” In : *XII International Congress on Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences*. 2014 (cf. p. 3).
- [84] I. RUBIO SCOLA, G. BESANÇON et D. GEORGES. “Frequency-model-based obstruction detection and location in a pipeline by output error minimization”. 9th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes (cf. p. 3).
- [85] I. RUBIO SCOLA, G. BESANÇON et D. GEORGES. “Optimal input for non-uniformly observable state-affine systems” (cf. p. 3).

- [86] I. RUBIO SCOLA, G. BESANÇON et D. GEORGES. “Simultaneous Leak and Blockage Detection in Pipelines Using the Frequency Response Model : An Optimisation Study” (cf. p. 3).
- [87] M. SAHNOUN et H. HAMMOURI. “Nonlinear observer based on observable cascade form”. In : *13th European Control Conference, ECC 2014* (2014) (cf. p. 1).
- [88] A. SATTAR, M. H. CHAUDHRY et A. A. KASSEM. “Partial Blockage Detection in Pipelines by Frequency Response Method”. In : *Journal of Hydraulic Engineering* 134 (2008), p. 76–89 (cf. p. 91).
- [89] M. SEPEHRAN et M. A. B. NOUDEH. “Water Hammer Simulation by Implicit Finite Difference Scheme Using Non-Symmetrical Staggered Grid”. In : *Recent Advances in Fluid Mechanics, Heat and Mass Transfer and Biology*. 2012, p. 47 (cf. p. 54).
- [90] W. F. SILVA-ARAYA et M. H. CHAUDHRY. “Unsteady friction in rough pipes”. In : *Journal of Hydraulic Engineering* 127.7 (2001), p. 607–618 (cf. p. 54).
- [91] D. SIMON. *Optimal State Estimation : Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches*. Wiley, 2006 (cf. p. 42, 115).
- [92] P. J. THOMAS. *Simulation of industrial processes for control engineers*. Butterworth-Heinemann, 1999 (cf. p. 57).
- [93] W. T. THOMSON. *Vibration theory and applications*. Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1965 (cf. p. 61).
- [94] A. ȚICLEA et G. BESANÇON. “Observer design for state and parameter estimation in induction motors with simulation and experimental validation”. In : *32rd annual conf of IEEE Industrial Elec Society IECON*. Paris, France, 2006 (cf. p. 14, 24, 34, 41, 95).
- [95] A. ȚICLEA et G. BESANÇON. “State and parameter estimation via discrete-time exponential forgetting factor observer”. In : *15th IFAC Symposium on System Identification*. St Malo, France, 2009 (cf. p. 15–18, 34, 42).
- [96] A. ȚICLEA et G. BESANÇON. “Exponential forgetting factor observer in discrete time”. In : *Systems & Control Letters* 62.9 (2013), p. 756–763 (cf. p. 1).
- [97] L. TORRES. “Modèles et observateurs pour les systèmes d’écoulement sous pression. Extension aux systèmes chaotiques”. Thèse de doct. Université de Grenoble, 2011 (cf. p. 54, 66, 98, 107).
- [98] L. TORRES, G. BESANÇON, A. NAVARRO, O. BEGOVICH, D. GEORGES et al. “Examples of pipeline monitoring with nonlinear observers and real-data validation”. In : *Proceedings of the 8th International IEEE Multi-Conference on Systems, Signals and Devices (SSD 2011)*. 2011 (cf. p. 1, 34, 66, 91, 98).
- [99] E. TRÉLAT. “Some Properties of the Value Function and Its Level Sets for Affine Control Systems with Quadratic Cost”. In : *Journal of Dynamical and Control Systems* 6.4 (2000), p. 511–541 (cf. p. 42).
- [100] E. TRÉLAT. *Contrôle optimal : théorie & applications*. Vuibert Paris, 2005 (cf. p. 42).
- [101] J. TUCK, P. J. LEE, M. DAVIDSON et M. S. GHIDAOUI. “Analysis of transient signals in simple pipeline systems with an extended blockage”. In : *Journal of Hydraulic Research* ahead-of-print (2013), p. 1–11 (cf. p. 91).

- [102] C. VAN LOAN. “Computing integrals involving the matrix exponential”. In : *Automatic Control, IEEE Transactions on* 23.3 (1978), p. 395–404 (cf. p. 24, 95).
- [103] C. VERDE. “Multi-leak detection and isolation in fluid pipelines”. In : *Control Engineering Practice* 9.6 (2001), p. 673–682 (cf. p. 54).
- [104] C. VERDE. “Minimal order nonlinear observer for leak detection.” In : *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 26 (2004), 467–472 (cf. p. 76, 98).
- [105] C. VERDE. “Accommodation of multi-leak location in a pipeline.” In : *Control Engineering Practice* 13 (2005), p. 1071–78 (cf. p. 57, 91).
- [106] C. VERDE, G. BORNARD et S. GENTIL. “Isolability of multileaks in a pipeline”. In : *Proceedings 4th MATHMOD*. Vienna, Austria, 2003 (cf. p. 1, 75).
- [107] C. VERDE et N. VISAIRO. “Identifiability of multi-leaks in a pipeline”. In : *Proceedings of the American Control Conference*. T. 5. Boston, USA, 2004, p. 4378–4383 (cf. p. 1, 68, 75).
- [108] C. VERDE, N. VISAIRO et S. GENTIL. “Two leaks Isolation in a pipeline by transient response”. In : *Advances in Water Resources* 30.8 (2007), p. 1711–1721 (cf. p. 75).
- [109] X.-J. WANG, M. F. LAMBERT, A. R. SIMPSON, J. A. LIGGETT et J. P. VIŤKOVSKÝ. “Leak detection in pipelines using the damping of fluid transients”. In : *Journal of Hydraulic Engineering* 128.7 (2002), p. 697–711 (cf. p. 54).
- [110] X.-J. WANG, M. F. LAMBERT et A. R. SIMPSON. “Detection and Location of a Partial Blockage in a Pipeline Using Damping of Fluid Transients”. In : *Journal of water resources planning and management* 131.3 (2005), p. 244–249 (cf. p. 54).
- [111] P. WESSELING. *Principles of computational fluid dynamics*. T. 29. Springer Science & Business, 2009 (cf. p. 82).
- [112] J. H. WILKINSON. *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford University Press, 1965 (cf. p. 27).
- [113] V. WINSTEAD et I. V. KOLMANOVSKY. “Estimation of road grade and vehicle mass via model predictive control”. In : *Control Applications, 2005. CCA 2005. Proceedings of 2005 IEEE Conference on*. IEEE. 2005, p. 1588–1593 (cf. p. 42).
- [114] V. WINSTEAD et I. V. KOLMANOVSKY. “Observer control in a tracking problem via model predictive control”. In : *American Control Conference, 2005. Proceedings of the 2005*. IEEE. 2005, p. 822–827 (cf. p. 42).
- [115] C. R. WYLIE. *Advanced Engineering Mathematics : 3d Ed*. McGraw-Hill, 1966 (cf. p. 54).
- [116] E. B. WYLIE. “Resonance in pressurized piping systems”. In : *Journal of Fluids Engineering* 87.4 (1965), p. 960–966 (cf. p. 63).
- [117] M. ZHAO et M. GHIDAoui. “Investigation of turbulence behavior in pipe transient using a k- $\epsilon$  model”. In : *Journal of Hydraulic Research* 44.5 (2006), p. 682–692 (cf. p. 54).

---

**Résumé** — Ce travail se compose de deux parties, dans la première, deux types de méthodologies sont proposées pour garantir l’observabilité sur des systèmes non uniformément observables. Premièrement sont présentées les méthodes basées sur le grammien d’observabilité et, à continuation, les méthodes basées directement sur l’équation de l’observateur. Dans la deuxième partie, diverses techniques sont détaillées pour la détection de défauts (fuites et obstructions) dans les canalisations sous pressions. Pour cela on construit plusieurs modèles en discrétisant les équations du coup de bélier par différences finies, implicites et explicites dans le temps. Sur ces modèles des techniques sont développées en utilisant des observateurs et des algorithmes d’optimisation. Les modèles discrets ainsi que certains observateurs ont été validés par une série d’expériences effectuées dans des canalisations d’essai. Des résultats de convergence, expérimentaux et en simulation sont exposés dans ce mémoire.

**Mots clés :** Observateurs d’état non linéaires, optimisation, Pipeline, détection et localisation de défauts, dynamique des fluides, grande dimension.

---

---

**Abstract** — This work consists of two parts, in the first one, two types of methods are proposed to ensure the observability of non-uniformly observable systems. Firstly methods based on the observability gramian are presented, and then some methods based directly on the equation of the observer. In the second part, various techniques are detailed for the detection of defaults (leaks and obstructions) in a pipeline under pressure. For that, we built several models by discretizing the water hammer equations using finite differences explicit and implicit in time. Then some techniques are developed using observers and optimization algorithms. Discrete models and some observers were validated by a series of experiments in pipelines. Convergence, experimental and simulation results are presented in this manuscript.

**Keywords :** Nonlinear state observers, optimization, pipeline, fault detection and isolation, fluid dynamics, large scale system.

---